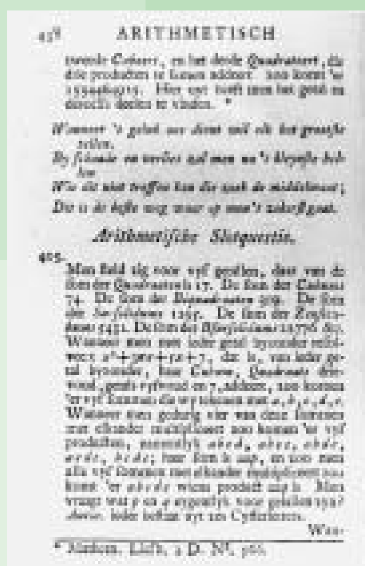
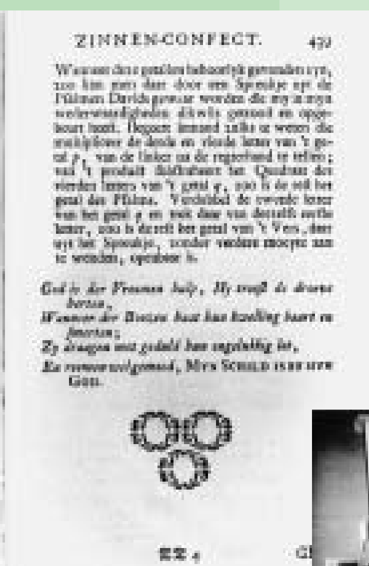
Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 75
1999-2000 mrt/apr.
6


ARITHMETISCH

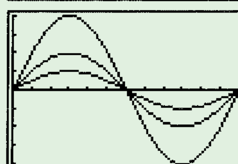

ZINNEN-CONFECT.







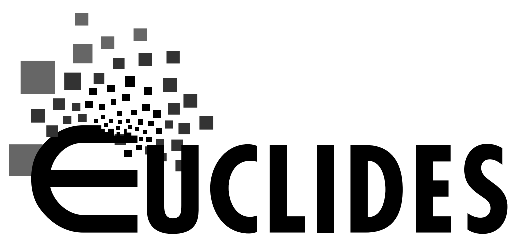
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=sin(X)
\Y2=2sin(X)
\Y3=.5sin(X)
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=



Wisconstighe Vermaecklyckheden: Marci de boekhouder

NVvW-Lustrumcongres 2000

GWA in mavo-4



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Veldzichtstraat 24
3731 GH De Bilt
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

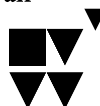
Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Richtlijnen voor mededelingen:

- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



www.nvvw.nl

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8
8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail:
W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Contributie per ver. jaar: ƒ 80,00
Studentleden: ƒ 40,00
Leden van de VVWL: ƒ 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: ƒ 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer. Abonnementsprijs voor personen: ƒ 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: ƒ 240,00 per jaar. Betaling geschiedt per acceptgiro. Losse nummers op aanvraag leverbaar voor ƒ 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties
Informatie, prijsopgave en inzending:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordrecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail lbozuwa@worldonline.nl
of
F. Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

Colofon
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Adresgegevens auteurs

A.G. van Asch
Benedenmolenweg 3D
4112 NS Beusichem

D. Beckers
Merelstraat 16
6542 WJ Nijmegen

R. Bosch
Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

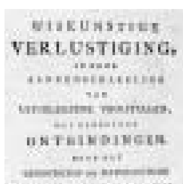
M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk

W. Kuipers
Waalstraat 8
8052 AE Hattem

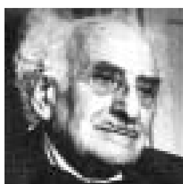
W. Laaper
Waleweinlaan 116
5665 CL Geldrop

A. Niënkemper
Van Lodenstein College
Utrechtseweg 228
3818 ET Amersfoort

Inhoud


WISKUNSTIGE
VERLUSTIGING,
ONTBINDINGEN

183



198



204

van de redactietafel

Als u dit nummer krijgt zijn de examens al weer in aantocht. Voor de havo gaat het bij vrijwel alle scholen om de laatste examens ‘oude stijl’.
Een klein aantal scholen zal dit jaar voor het eerst de nieuwe examens havo A12, havo B1 en havo B12 afnemen. Voor het eerst officiële examens volgens het nieuwe programma, met de grafische rekenmachine, met de formulekaart (of natuurlijk met het boekje *Wisforta*, dat de Vereniging heeft gemaakt) en met nieuwe correctievoorschriften voor de oplossingen die leerlingen geven met behulp van de grafische rekenmachine.
In Euclides zullen we u zo snel mogelijk op de hoogte proberen te brengen van de wetenswaardigheden over deze nieuwe examens.

Oproep

Bent u docent aan een school die dit jaar de nieuwe Tweede Fase havo-examens afneemt en wilt u een bijdrage leveren aan het informeren van uw collega’s over het wel en wee van deze examens, dan verzoekt de redactie u contact op te nemen. Het adres staat in het colofon.
De bijdrage kan bijvoorbeeld via een interview gaan, maar bijvoorbeeld ook aan de hand van enkele karakteristieke leerlingenuitwerkingen.
De redactie hoopt van u te horen.

Examenbesprekingen

Zoals altijd organiseert de Vereniging weer examenbesprekingen op diverse plaatsen in het land. Uiteraard voor alle examens: vbo/mavo C/D, havo wiskunde A en B en vwo wiskunde A en B. Ook is er voorzien in een examenbespreking voor de nieuwe Tweede Fase havo-examens. Elders in dit nummer staan alle gegevens weer bij elkaar.

Weging Praktische Opdrachten havo A1

Bij de laatste wijzigingen rond de Tweede Fase van januari jongstleden ging de weging van de Praktische Opdrachten voor het schoolexamen terug van 40% naar 20%.
Dat geldt voor alle profielwiskundes, die worden afgesloten met een Centraal Examen.
Onduidelijk was wat dit betekende voor de weging van 30% die was vastgesteld voor het schoolexamen havo A1. Het laatste bericht dat mij heeft bereikt, is dat dit 30% blijft. Wilt u het echt zeker weten dan moet u het maart-nummer van Uitleg even op school opzoeken.
Daar schijnt het formeel te worden vastgelegd.

Vmbo

Op de scholen voor vmbo gaat de aandacht op dit moment vooral uit naar het groeperen van de leerlingenstromen: welke leerlingen gaan naar het praktijkonderwijs en welke leerlingen krijgen leerwegondersteunend onderwijs? Welke leerlingen plaatsen we in de basisberoepsgerichte leerweg, welke in de kaderberoepsgerichte leerweg, en welke in de gemengde of theoretische leerweg?
Daarna komt al snel de vraag welke leerlingen in de derde klas dan bij elkaar kunnen zitten en welke niet?
De verschillende uitgevers leveren op dit moment in ieder geval al informatie over hoe deze leerwegen in de boeken verwerkt worden.
In Euclides besteden we ook in dit nummer weer aandacht aan GWA en praktische opdrachten voor vbo en/of mavo.
Dat zal namelijk zeker een rol gaan spelen in de nieuwe programma’s en we hopen u daarmee praktische voorbeelden te kunnen geven.

Kees Hoogland

Recreatieve wiskunde in Nederland in de 18de eeuw: A.F. Marci de boekhouder

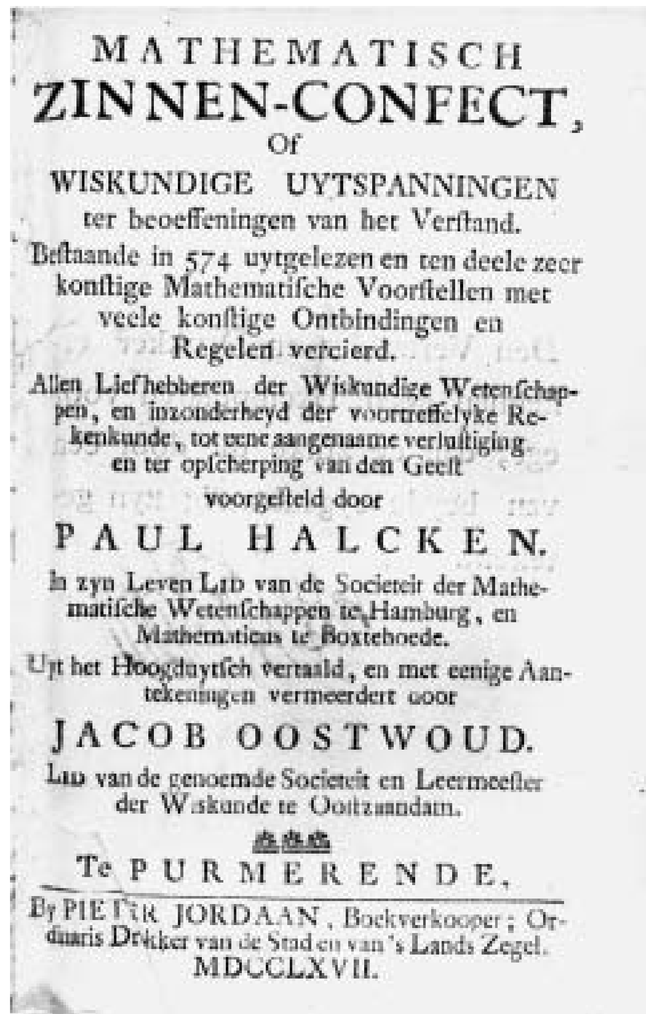
Wisconstighe Vermaecklyckheden III

Danny Beckers

Inleiding

Voor een grote groep mensen in de achttiende eeuw bestond recreatieve wiskunde uit het reproduceren van verbazingwekkende, maar rationeel verklaarbare proeven met apparaten. De benodigde machinerie was tamelijk prijzig, maar in de tweede helft van de eeuw der Verlichting wist Guyot zijn werkplaats te Parijs draaiende te houden op bestellingen van dit soort apparaten. Zijn klanten kwamen uit heel Europa.[1])

De opkomende middenklasse van ingenieurs, boekhouders en onderwijzers, kon zich niet veroorloven grote bedragen te spenderen aan haar vermaak. Echter: ook in deze groep verspreidde zich in de loop van de 18de eeuw de kennis en de gelegenheid om zich op een recreatieve wijze met wiskunde bezig te houden. Bij gebrek aan financiële middelen creëerden zij een geheel eigen stijl van recreatieve wiskunde; een stijl die veel nauwer aansloot bij de hedendaagse recreatieve wiskunde, dan de recreatie die hun rijkere tijdgenoten bedreven.


MATHEMATISCH
ZINNEN-CONFECT,
Of
WISKUNDIGE UYTSPANNINGEN
ter beoeffeningen van het Verstand.
Bestaande in 574 uytgelezen en ten deele zeer konstige Mathematische Voorstellen met veele konstige Ontbindingen en Regelen vercierd.
Allen Liefhebberen der Wiskundige Wetenschappen, en inzonderheyd der voortreffelyke Rekenkunde, tot eene aangenaame verlustiging en ter opscherping van den Geest
voorgesteld door
PAUL HALCKEN.
In zyn Leven Lid van de Societeit der Mathematische Wetenschappen te Hamburg, en Mathematicus te Boxtehoede.
Uyt het Hoogduytsch vertaald, en met eenige Aantekeningen vermeerdert door
JACOB OOSTWOUD.
Lid van de genoemde Societeit en Leermeester der Wiskunde te Oostzaandam.
Te PURMERENDE,
By PIETER JORDAAN, Boekverkooper; Ordinaris Drukker van de Stad en van 's Lands Zegel.
MDCCLXVII.

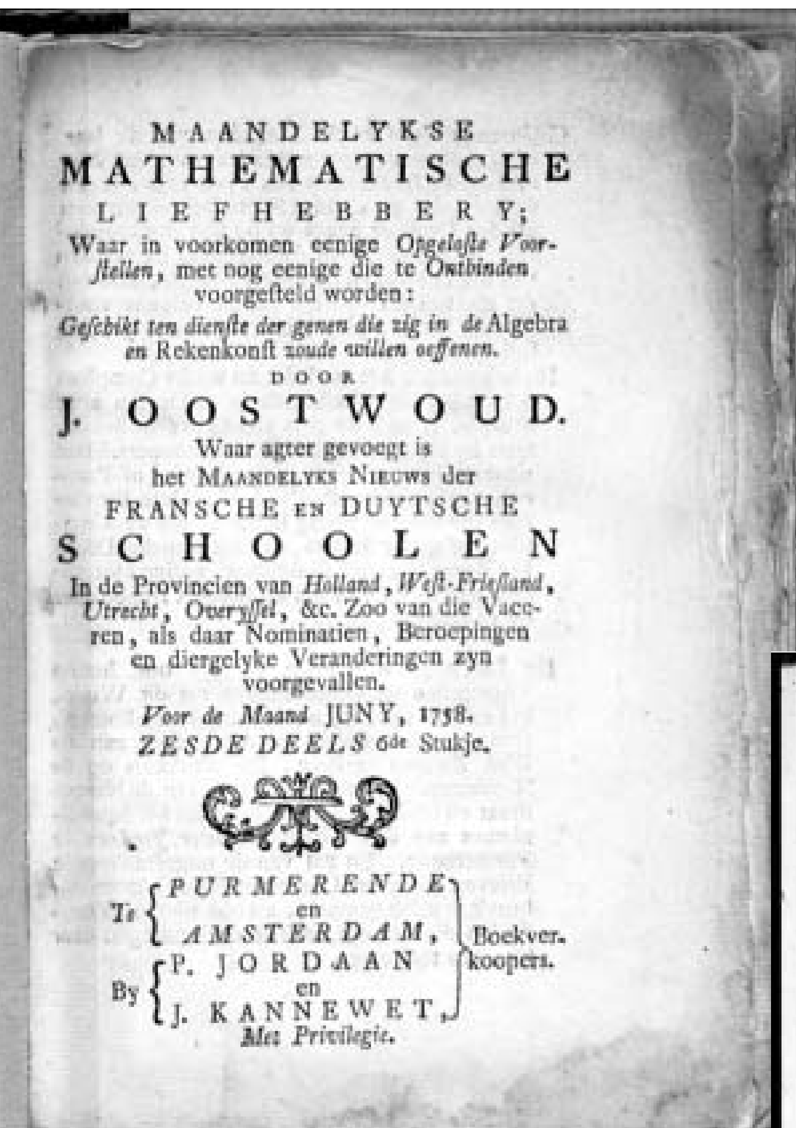
Status van de wiskunde

Wiskunde werd door de achttiende-eeuwse middenklasse beschouwd als een zeer belangrijk vak. De kooplieden leerden hun rekenwerk in de overtuiging dat de zekerheid brengende wetten van de wiskunde hun de welvaart brachten die ze genoten. Voor boekhouders en ingenieurs was de wiskunde zeker zo belangrijk. Niet dat zij wiskunde leerden op de manier zoals wij dat vandaag doen. Integendeel zelfs: zij leerden voor het merendeel regeltjes volgens welke een bepaald soort opgaven diende te worden opgelost. Maar zij waren er ten sterkste van overtuigd dat de structuur achter die regels voor de goede leerling zich zou opdringen, en voor de minder goede leerling uiteindelijk het houvast zou bieden dat hij nodig had om snel en vaardig zijn werk te kunnen verrichten.

De onderwijzer die rekenonderwijs kon geven, de rekenmeester, kon een aardige cent bijverdienen. Weeskinderen die zich bekwaam toonden op de weesschool konden terecht op de charitatieve fundatiescholen van de vrijvrouwe van Renswoude. Daar werden ze, met een stevige dosis wiskunde, opgeleid tot een (ingenieurs-)vak en zodoende bleef hun de armoede bespaard.[2]) Wiskunde was kortom voor velen een bron van (extra) inkomsten, en daarmee genoot degene die in de wiskunde thuis was een zeker aanzien in de lage middenklasse. Mogelijk was de beoefening van recreatieve wiskunde voor de middenklasse dus ook een soort statussymbool.

Recreatie en educatie

De wiskundige recreatie die deze groep achttiende-eeuwers beoefende, was zeker niet vrij van educatieve elementen. Welbeschouwd leert een mens natuurlijk altijd wanneer hij een nieuwe opgave maakt, maar in de achttiende-eeuwse middenklasse-literatuur op het gebied van de recreatieve wiskunde was het educatieve element heel pregnant aanwezig. Zo bevatte het tijdschrift voor rekenmeesters de *Mathematische Liefhebberye* (1754-1765), tevens kleine stukjes theorie, onder andere over rijen en reeksen. Bij die theorie stonden veel opgaven waarvan het recreatief karakter ver te zoeken was: ze konden zo uit de lesboeken van die tijd zijn geplukt. Iets dat wij, afgaande op de titel van het tijdschrift, niet zouden verwachten. [3])


MAANDELYKSE
MATHEMATISCHE
LIEFHEBBERY;
Waar in voorkomen eenige *Opgeloste Voorstellen*, met nog eenige die te *Ontbinden* voorgesteld worden:
Geschikt ten dienste der genen die zig in de Algebra *en* Rekenkonst *zoude willen oeffenen.*
DOOR
J. OOSTWOUD.
Waar agter gevoegt is
het MAANDELYKS NIEUWS der
FRANSCHE EN DUYTSCHE
SCHOOLEN
In de Provincien van *Holland*, *West-Friesland*, *Utrecht*, *Overyssel*, &c. Zoo van die Vaceren, als daar Nominatien, Beroepingen en diergelyke Veranderingen zyn voorgevallen.
Voor de Maand JUNY, 1758.
ZESDE DEELS 6de Stukje.

Te *PURMERENDE* en *AMSTERDAM*,
By P. JORDAAN en J. KANNEWET, Boekverkoopers.
Met Privilegie.

Het boek *Mathematisch Zinnen-Confect of Wiskundige Uytspanningen* (1767) van Paul Halcken was geschreven met als doel 'een aangenaame verlustiging' te bieden, maar diende tevens 'ter beoeffeningen van het Verstand'. Ook hier treffen we naast 'vermakelijke opgaven' theorie aan, en een geschiedenis van benaderingen van π. [4]) In de titels van de boeken werd steeds benadrukt dat het echt om recreatie ging, en dat de koppeling van recreatie aan educatie volkomen vanzelfsprekend was. De titel van een van de eerste tijdschriften van het Wiskundig Genootschap bijvoorbeeld: *Wiskunstige Verlustiging* (1793-1795) laat aan duidelijkheid niets te wensen over. Het genootschap stelde zich een zeer serieus doel: het verspreiden van kennis omtrent de nuttige wiskundige wetenschap. [5])

Onderwerpen

Zoals gezegd waren de onderwerpen die aan bod kwamen in deze recreatieve wiskundeliteratuur zeer herkenbaar. De sporadisch voorkomende astronomische vraagstukken zijn nog het meest exotisch.


WISKUNSTIGE
VERLUSTIGING,
IN EENE
AANEENSCHAKELING
VAN
UITGELEEZENE VOORSTELLEN,
MET DERZELVER
ONTBINDINGEN.
DOOR HET
GENOOTSCHAP DER MATHEMATISCHE
WEETENSCHAPPEN,
ONDER DE SPREUK:
EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN.
EERSTE DEEL.

Te AMSTERDAM,
Gedrukt voor Rekening van 't GENOOTSCHAP, en zyn te bekomen by P. G. GEYSBEEK, op de hoek van de Prinsegragt en Eglantiersstraat,
MDCCXCIII.


HET VERMAAKELYK
REEKEN-KONSTIG SPEL
Van de
QUADRATA MAGICA,
OF
zo genaamde
TOOVER-VIERKANTEN
Van 12 maal 12 Perken,
OP HET JAAR-GETAL 1743.
Nevens
EEN APPENDIX,
Bevattende
Verscheide Voorstellen, zo uit de Cyffer-Meet- als Stel-konst,
EN
Eene bygevoegde Nieuw-Jaars-Gifte voor onkundige Cyffer-Meesters, opgesteld
DOOR
ADOLPH FREDERIK MARCI,
Boekhouder en Vertaalder,
Mede-Lid in de Societeit of 't Gezelschap der Konst-Reekenaars tot Hamburg.

t'AMSTERDAM,
By De JANSSOONS VAN WAESBERGE.
MDCCXLIV.

Wegens de onmogelijkheid voor de middenklasse om gebruik te maken van dure instrumenten, waren de vragen allemaal theoretisch van aard. Veel algebraïsche vergelijkingen op een aardige wijze ingekleed ('Iemant heeft een schoon Mathematisch Boek gekogt voor zoo veel Ryxdaalders, dat, wanneer men dezelve met 696 multipliceert…'), of opgaven die een ontbinding in factoren en een beetje puzzelen vereisten:

> Daar is een Breuk wiens Noemer 108 meer is als de Teller: als men deze Breuk verkleynd, zoo doet de Noemer 6 meer als de Teller, en zoo men de Noemers en Tellers van de onverkleynde en verkleynde Breuken met elkander multipliceert, komt 'er 2683044. Wat is het voor een Breuk? [6])

Ook eenvoudige vlakke meetkunde kwam aan bod, en af en toe zelfs een beetje analyse.
Het *Vermaakelyk Reekenkonstig Spel van de Quadrata Magica* (1744) van A.F. Marci gaat voor het merendeel over tovervierkanten, een voor de hand liggend onderwerp voor recreatieve wiskunde. Marci geeft zelf ook aan dat het bepaald geen nuttig onderwerp betreft, maar gewoon erg leuk en leerzaam is. [7]) Het boek van Marci mag illustratief worden genoemd voor de recreatieve wiskunde van de middenklasse in de achttiende eeuw. Het was tamelijk populair: in 1791 verscheen een herdruk, en daarmee is het een van de weinige achttiende eeuwse boeken in zijn soort [8]); bovendien had Marci een origineel onderwerp dat navolging vond [9]).

Wiskunde en 'ondervinding'

Het werk van Marci in zijn geheel is illustratief voor een curieuze opvatting over wiskunde bij zijn vak- en tijdgenoten. In een boek over priemgetallen bijvoorbeeld meende hij na het controleren van een aantal voorbeelden ontdekt te hebben dat elk priemgetal, op de eerste paar na, van de vorm $6n \pm 1$ ($n \in \mathbb{N}$) moest zijn. Een bewijs had hij er niet voor, maar dat maakte voor hem de stelling niet minder zeker. [10]) Het bewijs is echt niet moeilijk te bedenken; als hem 'n regelmaat was opgevallen, had hij die ook in een redenering kunnen vatten. Omdat Marci niet de beschikking had over onze notaties en ideeën van wiskundige strengheid had zijn bewijs ons misschien niet aangestaan, maar dan hadden we hem kunnen begrijpen. Met zijn expliciete opmerking dat het ontbreken van een bewijs de stelling niet minder zeker maakt omdat hij zoveel voorbeelden heeft gecontroleerd, mengt Marci de wiskundige zekerheid met experimenteel verkregen informatie. Het geeft een beetje aan wat Marci onder wiskunde verstond en hoe goed hij erin thuis was. Wiskunde en de 'ondervinding' stonden voor Marci veel dichter bij elkaar dan voor ons tegenwoordig gebruikelijk is.
Deze opvatting vinden we in een voor ons nog minder herkenbare (extreme) vorm terug in een 'wiskundige' ontdekking in een tijdschrift, bestemd voor de middenklasse uit 1762. Daarin beweerde een anonieme auteur aan de hand van een aantal voorbeelden dat een lot uit een kermis-loterij op 22 september of 21 december altijd prijs gaf. [11]) Voor deze man was dat het bewijs van de aanwezigheid van 'een zekere wiskunst' in zaken van geluk. Marci was dus zeker niet de enige met deze voor ons enigszins vreemde opvatting over wiskunde.

Fermat's descente infinie

Een primitief drietal van Pythagoras is een drietal positieve gehele getallen x, y, z met $\text{ggd}(x, y, z) = 1$ die voldoen aan de vergelijking $x^2 + y^2 = z^2$. Men gaat gemakkelijk na dat in zo'n drietal één van de getallen x en y even is.
De bekende karakterisering van de primitieve drietallen van Pythagoras wordt gegeven door de volgende stelling.

Stelling 1
Alle oplossingen van de Pythagoras-vergelijking
$x^2 + y^2 = z^2$ die voldoen aan
$\text{ggd}(x, y, z) = 1;\ \ 2 \mid x;\ \ x, y, z > 0$
worden gegeven door
$x = 2st;\ y = s^2 - t^2;\ z = s^2 + t^2$
met s en t geheel, $s > t > 0$, $\text{ggd}(s, t) = 1$ en $s \not\equiv t \bmod 2$.

Fermat gebruikte deze stelling om aan te tonen dat de Diophantische vergelijking $x^4 + y^4 = z^2$ geen oplossingen heeft in de positieve gehele getallen. De bewijstechniek die hij hierbij gebruikte, noemde hij *descente infinie*, letterlijk oneindige afdaling. We zullen deze methode illustreren aan de hand van een voorbeeld van Fermat zelf.

Stelling 2 (Fermat)
De vergelijking $x^4 + y^4 = z^2$ heeft geen oplossing in positieve gehele getallen x, y, z.

Bewijs: Stel dat x_0, y_0, z_0 een positieve oplossing is van de vergelijking $x^4 + y^4 = z^2$. Zonder beperking van de algemeenheid mogen we aannemen dat $\text{ggd}(x_0, y_0) = 1$, anders delen we het linker- en rechterlid van de vergelijking door de ggd van x_0 en y_0. Voor x_0, y_0, z_0 geldt
$(x_0^2)^2 + (y_0^2)^2 = z_0^2$
en dus is x_0^2, y_0^2 en z_0 een primitief Pythagoras drietal.
Volgens Stelling 1 bestaan er dus twee positieve gehele getallen s en t ($s > t$) die relatief priem zijn met
$x_0^2 = 2st;\ y_0^2 = s^2 - t^2;\ z_0 = s^2 + t^2$
waarbij of s of t even is. Indien s even is dan is
$1 \equiv y_0^2 = s^2 - t^2 \equiv 0 - 1 \equiv 3 \bmod 4$
hetgeen onmogelijk is. Dus moet s oneven en t even zijn.
Zij $t = 2u$. De vergelijking $x_0^2 = 2st$ wordt dan $x_0^2 = 4su$
ofwel $(x_0/2)^2 = su$
Aangezien s en u relatief priem zijn, moeten beide een kwadraat zijn. We kunnen dus schrijven $s = z_1^2$ en $u = w_1^2$ met z_1 en w_1 positief. We passen Stelling 1 nogmaals toe, ditmaal op de vergelijking $t^2 + y_0^2 = s^2$
Daar $\text{ggd}(s, t) = 1$ is, geldt $\text{ggd}(t, y_0, s) = 1$ en dus is t, y_0, s een primitief Pythagoras drietal. Met t is even krijgen we
$t = 2vw;\ y_0 = v^2 - w^2;\ s = v^2 + w^2$
met v en w relatief priem. Uit de relatie $vw = t/2 = u = w_1^2$ volgt dat zowel v als w kwadraten zijn. Zeg $v = x_1^2$ en $w = y_1^2$. Substitutie in de vergelijking voor s geeft:
$z_1^2 = s = v^2 + w^2 = x_1^4 + y_1^4$
Omdat z_1 en t positief zijn, geldt
$0 < z_1 \leq z_1^2 = s \leq s^2 < s^2 + t^2 = z_0^2$

Uitgaande van een positieve oplossing x_0, y_0, z_0 van $x^4 + y^4 = z^2$, hebben we een tweede oplossing x_1, y_1, z_1 geconstrueerd met $z_1 < z_0$. Herhaling van de constructie leidt tot een derde oplossing x_2, y_2, z_2 met $z_2 < z_1$, welke dan weer leidt tot een vierde oplossing enz.
De constructie leidt zo tot een oneindige rij van positieve gehele getallen kleiner dan z_0
$z_0 > z_1 > z_2 > \ldots$
Aangezien er slechts eindig veel positieve gehele getallen kleiner dan z_0 zijn, geeft dit een tegenspraak. De conclusie luidt dat de vergelijking $x^4 + y^4 = z^2$ geen positieve oplossing heeft.
Een direct gevolg van stelling 2 is

Stelling 3
De vergelijking $x^4 + y^4 = z^4$
heeft geen oplossing in de positieve gehele getallen.

De bovenstaande stelling is een bijzonder geval van het beroemde vermoeden van Fermat dat de vergelijkingen $x^n + y^n = z^n$, $n > 2$ geen oplossingen hebben in de positieve gehele getallen. Fermat heeft dit vermoeden dus voor het geval $n = 4$ bewezen. Zoals bekend heeft Andrew Wiles enige tijd geleden aangetoond dat het vermoeden juist is.
Fermat gebruikte de *descente infinie* voor verschillende bewijzen. In een brief aan Huygens in 1659 schrijft hij hierover: 'Omdat de gewone methoden die we in boeken tegenkomen, niet toereikend zijn om zulke moeilijke stellingen te bewijzen, vond ik een heel aparte methode … die ik *descente infinie* heb genoemd. Eerst gebruikte ik deze methode om er negatieve beweringen mee te bewijzen, zoals "Er is geen rechthoekige driehoek met gehele zijden waarvan de oppervlakte een kwadraat is."… Het is veel moeilijker om er positieve beweringen mee te bewijzen. Toen ik wilde bewijzen dat ieder priemgetal van de vorm $4n + 1$ de som van twee kwadraten is, had ik dan ook grote problemen. Maar uiteindelijk bleek de methode ook geschikt voor deze vragen.'

Rob Bosch

Literatuur

A. Weil **Number Theory, an approach through history**

438 ARITHMETISCH

tweede *Cubeert*, en het derde *Quadrateert*, die drie producten te famen addeert zoo komt 'er 155446492:5. Hier uyt heeft men het getal en deszelfs deelen te vinden. *

Wanneer 't geluk ons dient wil elk het grootste tellen.
By schaade en verlies zal men na 't kleynste bellen.
Wie dit niet treffen kan die zoek de middelmaat;
Dit is de beste weg waar op men 't zekerst gaat.

Arithmetische Slotquestie.

415. Men steld zig voor vyf getallen, daar van de som der *Quadraaten* is 17. De som der *Cubums* 74. De som der *Biquadraaten* 309. De som der *Sursolidums* 1295. De som der *Zensicubums* 5432. De som der *Bsursolidums* 22776 &c. Wanneer men met ieder getal byzonder resolveert $x^3+3xx+5x+7$, dat is, van ieder getal byzonder, haar *Cubum*, *Quadraats* drievoud, getals vyfvoud en 7, addeert, zoo komen 'er vyf sommen die wy tekenen met *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Wanneer men gedurig vier van deze sommen met elkander multipliceert zoo komen 'er vyf producten, namentlyk *abcd*, *abce*, *abde*, *acde*, *bcde*; haar som is $=p$, en zoo men alle vyf sommen met elkander multipliceert zoo komt 'er *abcde* wiens product $=q$ is. Men vraagt wat *p* en *q* eygentlyk voor getallen zyn? *Antw.* ieder bestaat uyt zes Cyfferletters.

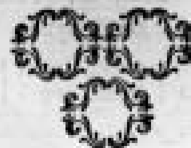
Wan-

* Mathem. Liefh. 2 D. N°. 566.

ZINNEN-CONFECT. 439

Wanneer deze getallen behoorlyk gevonden zyn, zoo kan men daar door een Spreukje uyt de Psalmen Davids gewaar worden die my in myn wederwaardigheden dikwils getroost en opgebeurt heeft. Begeert iemand zulks te weten die multipliceer de derde en vierde letter van 't getal *p*, van de linker na de regterhand te tellen; van 't product substraheert het Quadraat des vierden letters van 't getal *q*, zoo is de rest het getal des Psalms. Verdubbel de tweede letter van het getal *q* en trek daar van deszelfs eerste letter, zoo is de rest het getal van 't Vers, daar uyt het Spreukje, zonder verdere moeyte aan te wenden, openbaar is.

God is der Vroomen hulp, Hy troost de droeve herten,
Wanneer der Boozen haat hun kwelling baart en smerten;
Zy draagen met geduld hun ongelukkig lot,
En roemen welgemoed, MYN SCHILD IS BY MYN GOD.



ZZ 4 GEO-

Slotvraag (met gedicht) uit Paul Halcken's *Mathematisch Zinnen-Confect*

De auteur en zijn publiek

Adolph Frederik Marci (†1774) was werkzaam als boekhouder en vertaler te Amsterdam. Hij was een groot bewonderaar van het werk van zijn tijdgenoot Euler [12]) en lid van het Wiskundig Genootschap te Hamburg: het oudste genootschap aan de wiskunde toegewijd. Het Hamburgse Genootschap bestond uit liefhebbers als Marci, die zichzelf in toerbeurt opwierpen als de auteur van een boekje om de medeleden mee te plezieren. In dat kader schreef Marci ook zijn *Quadrata Magica*. Hij hield er echter terdege rekening mee dat het boek ook onder zijn landgenoten aftrek zou vinden: hij had zelfs een aantal pagina's speciaal aan 'onkundige cijffermeesters' gewijd. Hier liet hij de rekenmeesters kennis maken met de 9-proef, en liet hij zien dat men op analoge wijze ook een 19-proef of 37-proef zou kunnen doen [13]).

De *Quadrata Magica* bestaat grofweg uit twee stukken. In het eerste stuk gaat Marci in op de constructie van een tovervierkant. In het tweede stuk geeft hij enkele tientallen reken- en meetkunde-opgaven ter oefening. Die opgaven gaan over hogeremachts vergelijkingen (m.b.v. de regels van Cardano en Descartes), het benaderen van logarithmen, en opgaven die met een van de regels uit het rekenboek van Bartjens te lijf konden worden gegaan. Aardig zijn met name de vragen over rijen en reeksen. In moderne notatie luidt een van deze opgaven: gegeven de rijen $a_n := 127 + 131 \cdot n$, $b_n := b - 171 \cdot n$ èn $a_{2056} = b_{2056}$. Gevraagd werd de waarde van b. Tevens waren enige opgaven over de sommen van reeksen opgenomen [14]). Allemaal zeer geschikte kost voor de betere achttiende-eeuwse rekenmeester of ingenieur die zich in zijn spaarzame vrije uurtjes nog wat met wiskunde wilde bezig houden. Al de besproken eigenaardigheden van de recreatieve wiskundebeoefening door de achttiende-eeuwse middenklasse zijn herkenbaar in Marci's boek over de tovervierkanten.

Tovervierkanten

Een tovervierkant is voor Marci een vierkant(e matrix) waarin getallen uit een rekenkundige rij zijn geplaatst, zodanig dat de som van de getallen horizontaal en verticaal steeds dezelfde waarde oplevert. Hij laat aan de hand van een paar voorbeelden zien dat als je eenmaal zo een tovervierkant hebt, de eigenschap van het tovervierkant behouden blijft wanneer je rijen of kolommen onderling verwisselt.

Zijn uiteindelijke doel is een recept voor het opstellen van een tovervierkant met een bepaald getal als uitkomst van de kolom- en rijsommen. Daartoe heeft hij een groot schema opgesteld waarvan hij het gebruik in receptvorm verklaart, en met een voorbeeld, het jaartal 1743, illustreert. Het schema, 40 bij 40 vakjes groot, heeft in het midden een vak van vier bij vier met daaromheen ringen met een breedte van één vakje. Het vak in het midden en elk van de ringen zijn door Marci in zijn schema gevuld met de getallen 1, 2, 3, … Wanneer je nu een tovervierkant van k bij k (vanwege de afmetingen van het schema is k aan de restrictie $4 \leq k \leq 40$ èn k even gebonden) wilt maken kies je eerst een rekenkundige rij. Welke rij je kiest is afhankelijk van de uitkomst die je bij elke rij- en kolomsom wilt krijgen. Eenvoudig valt na te gaan, en Marci doet dat ook, dat wanneer je de eerste k^2 elementen van de rij $(a + b \cdot n)_{n \in \mathbb{N}}$ gebruikt om een tovervierkant van k bij k te vullen, dat de kolom- en rijsommen dan allemaal $ka + \frac{1}{2}k^3 b$ zijn (k nog steeds even).
Na de keuze van de rekenkundige rij beperken we ons tot de eerste k^2 opeenvolgende elementen uit deze rij. Deze elementen (vanaf nu 'de vulrij' genoemd) verdelen we in groepjes volgens het schema van Marci: begin bij de buitenste ring van het vierkant van k bij k. Die bevat een even aantal elementen, zeg $2n$. Uit de vulrij nemen we de eerste n, en de laatste n elementen, zetten die in volgorde van klein naar groot, en plaatsen ze in de buitenste ring. Het eerste element uit de groep komt op het vak in die ring waar Marci een 1 heeft geplaatst, het tweede op 2 etcetera. Met het restant elementen uit de vulrij herhalen we deze operatie met de volgende ring, tot alle vakjes van het vierkant gevuld zijn en de vulrij in zijn geheel gebruikt is. Opvallend is dat het schema van Marci niet erg regelmatig is. Met de kolom- en rijwisselingen die hij zelf ter sprake bracht, is het uiteraard mogelijk om in de linkerbovenhoek van iedere ring een 1 te hebben staan. Daarnaast moeten de getallen die met sterretjes en kruisjes zijn gemarkeerd in bepaalde gevallen verwisseld: iets dat overbodig is bij een andere invulling van het sche-

ma[15]). Het zou kunnen dat Marci zijn schema heeft gevonden door gewoon te experimenteren. Minstens zo waarschijnlijk is echter dat Marci hier bewust enige mystificatie door zijn vinding heeft gemengd, om te voorkomen dat iedere rekenmeester met *zijn* werk zou gaan lopen pochen: het vereist veel inzicht in het schema om de cijferverwisselingen aan te brengen, en hij legt wel uit hoe het verwisselen moet gebeuren, maar niet waarom. Een dergelijke vorm van obscurantisme was onder uitgevers van goniometrietabellen niet ongewoon; een paar taktisch geplaatste foutjes in de laatste decimalen maakten roofdrukken onmiddellijk als zodanig herkenbaar. In Marci's schema stonden geen fouten, maar het effect dat hij trachtte te bereiken was hetzelfde: eenvoudige reproductie van zijn werk werd door een ongewone presentatie bemoeilijkt. Het is opvallend dat een dergelijke presentatie in wiskundig werk heel gewoon werd gevonden.

Conclusie

Wiskunde was voor de opkomende middenklasse in de achttiende eeuw een vak dat een hoge status genoot. De recreatieve beoefening van het vak had voor deze groep (mogelijk juist wegens die status) een tamelijk serieuze ondertoon. Bij gebrek aan financiële middelen gaven de rekenmeesters, boekhouders en ingenieurs aan hun (recreatief) wiskundige activiteiten een andere invulling dan hun elitaire tijdgenoten. Qua onderwerpskeuze was de recreatieve wiskunde van de middenklasse voor ons zeer herkenbaar. Voor deze mensen was de wiskundebeoefening echter vermengd met experimentele principes. Mogelijk voegden zij ook opzettelijk obscurantistische elementen toe om hun werk te beschermen tegen ideeën-roof. Deze ideeën over wiskunde, en de serieuze ondertoon waamee ze werd beoefend, maken dat er tussen de hedendaagse recreatieve wiskunde en die zoals die door de achttiende-eeuwse middenklasse beoefend werd, toch een wereld van verschil bestaat.

Noten

1 Zie deel 2 in deze serie, in: **Euclides 74** nr. 3 (december 1998), pp. 76-78
2 *E.P. de Booy en J. Engel* **Van erfenis tot studiebeurs** Delft (1985)
3 **Mathematische Liefhebberye, met het Nieuws, der Fransche en Duytsche Schoolen** 1754-1765
4 *Paul Halcken* **Mathematisch Zinnen-Confect of Wiskundige Uytspanningen ter beoeffeningen van het Verstand** Purmerend (1767) -vertaald uit het Duits door Jacob Oostwoud.
5 *S.B. Engelsman* 'Het Wiskundig Genootschap en eerste secretaris Strabbe' in: **Tweehonderd Jaar onvermoeide arbeid -tentoonstellingscatalogus** pp. 9-19
6 *P. Halcken* **Mathematisch Zinnen-Confect** pp. 271-272
7 *A.F. Marci* **Het Vermaakelyk Reeken-Konstig Spel van de Quadrata Magica** Amsterdam: De Janssoons van Waesberge (1744), p. 20
8 Andere populaire recreatieve wiskundeboeken voor de 18de-eeuwse middenklasse waren het eerder genoemde **Mathematisch Zinnenconfect**, en de **Liefhebbery der Reekenkonst** van G. van Steyn.
9 In de **Rekenkundige Byzonderheden** van Marten Jellen (1779) werden de beschouwingen van Marci over de tovervierkanten verder doorgevoerd.
10 *A.F. Marci* **Uitvoerige Tafelen van de Ondeelbaare of Prim-Getallen** Amsterdam (1772)
11 'De Wiskonst in het Geluk of Ongeluk der Loteryen' in: **De Boekzaal der Heeren en Dames I** (1762), pp. 75-80
12 Marci schreef twee artikelen die gebaseerd waren op werk van Euler: A.M., 'De verworpene Annhilatio ultimi termini, als een qualyk verzonne Konstgreep der Wiskonstenaren nopens de Arithmetica Infinitorum' in: **Vaderlandsche Letteroefeningen** 1762-I, pp. 45-56, 136-146, 214-234; en A.F.M., 'Methodus de Maximis et Minimis opgehelderd' in: **Vaderlandsche Letteroefeningen** 1763-II, pp. 346-354, 390-397, 429-438, 473-482, 507-522. Marci biecht zijn auteurschap van deze artikelen op in zijn **Uitvoerige Tafelen** uit 1772.
13 *A.F. Marci* **Quadrata Magica** (1744), pp. 127-136
14 ibidem, pp. 54-125
15 ibidem, pp. 26-34

Een oud probleem

F. van der Blij, A.G. van Asch

Voorwoord

In Euclides nr. 7, jaargang 73 stelden we het volgende probleem, afkomstig uit deel 1, jaargang 1 van het Wiskundig Tijdschrift, uit 1904.

Vraag 30. De volgende vormen zijn door $a+b+c$ deelbaar:
$a+b+c$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$a^5+b^5+c^5+5abc(ab+ac+bc)$

$a^7+b^7+c^7-7abc(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$

Er schijnt een algemene gedaante voor deze en soortgelijke door $a+b+c$ deelbare vormen te bestaan.
Deze is niet $\sum a^{2n+1}+(2n+1)(-1)^n abc\sum b^{n-1}c^{n-1}$, want de tweede vorm is niet $\sum a^3-3abc\sum b^0c^0$, maar $\sum a^3-abc\sum b^0c^0$. De eerste vorm kan wel onder deze gedaante gebracht worden, als men hem verdubbelt. De volgende (5de) vorm, nl. $\sum a^9+9abc\sum b^3c^3$ blijkt echter bij onderzoek niet deelbaar te zijn door $a+b+c$. De algemeene gedaante is ook niet $\sum a^{2n+1}+(2n+1)(-1)^n abc(\sum bc)^{n-1}$. De 2de en de 3de vorm zijn wel van die gedaante. De 4de ook, indien men er $14a^2b^2c^2(a+b+c)$ aftrekt. De 1ste echter niet. Ook blijkt de volgende vorm $\sum a^9+9abc(\sum bc)^3$ weer niet deelbaar te zijn door $a+b+c$.
Welke is de algemeene gedaante dezer vormen?

En wij vroegen ons af of er lezers van Euclides zouden zijn die zich met dit probleem wilden bezig houden. Allereerst willen we nu veel dank en waardering uitspreken voor de inzendingen die we ontvingen. We kregen schriftelijke reacties van

H. Boertien
L. van den Broek
L. van den Brom
E.C. Buissant des Amorie
M. Kindt
R.J. Kortram
H. Pot
F.H. Simons

Ieder van de inzenders had een eigen methode en een eigen, soms gedeeltelijke oplossing. In het onderstaande willen we hun werk samenvatten, combineren en hier en daar iets aanvullen.
Eerst enkele algemene opmerkingen. Het onderstaande artikel wil niet alleen over de wiskundige probleemstelling en de formele oplossing er van handelen. We willen ook enkele heuristische opmerkingen en didactische vraagstellingen terloops aan de orde stellen.
Enkele inzenders gaven een boeiend verslag van het verloop van hun onderzoekingen. We willen daar in dit overzicht ook enige aandacht aan geven.
We merken op dat vele inzenders ontdekten dat de formulering van de vraagstelling uit 1904 niet tot een eenduidige oplossing kan voeren. Het ‘op een zelfde manier voortzetten’ van de rij van enkele voorbeelden is altijd een ongedefinieerde zaak, maar ook wiskundig lijkt een eenduidige voortzetting niet mogelijk.
Maar toen wij de vraagstelling uit 1904 overnamen was het niet onze bedoeling de lezers een soort ‘eindexamen-vraagstuk’ voor te zetten, waarvan de oplossing in alle details eenduidig vanuit de normen lijkt te zijn vastgelegd.
Het is meer een onderzoeks-opdracht. En zo als zo vaak, of zelfs meestal bij wiskundig onderzoek gebeurt, moet de vraagstelling tijdens het onderzoek aangescherpt en verduidelijkt worden. Ook dat is een stukje wiskundige activiteit.
Een wiskundige vraagstelling kan de gedaante hebben ‘Er moet een stelling zijn die ongeveer zo en zo iets zegt’.

Inleiding

Sommige inzenders hebben zich tot één interpretatie beperkt, anderen hebben duidelijk gemaakt dat zij een aantal interpretaties hebben bestudeerd en bij deze interpretaties gepoogd hebben algemene resultaten te verkrijgen.
Maar ook nadat een interpretatie gekozen is zijn er verschillende manieren om resultaten te bereiken.
Een wezenlijk verschil voor de oplossing van combinatorische problemen is of men aan de hand van een aantal expliciete voorbeelden tot een algemeen vermoeden kan komen en daarna bijvoorbeeld met volledige

inductie een bewijs geven. I. Stewart noemt deze methode spottenderwijs de methode van '*Let* $2 = n$'. Soms werd met de hand en het hoofd gerekend, soms werd de computer mee ingeschakeld. Een andere methode geeft zonder volledige inductie direct een gezochte formule, als regel lijkt ons deze methode didactisch aantrekkelijker. Het verschil van deze methoden is bijvoorbeeld duidelijk bij de verschillende bewijzen die voor het binomium van Newton gegeven worden. Men kan de vorm van de binomiaal coëfficiënten raden en dan met volledige inductie naar n de formule voor $(a+b)^n$ bewijzen.
Maar men kan ook de coëfficiënt van $a^k b^{n-k}$ in het uitgewerkte binomium interpreteren als het aantal manieren om k objecten uit een verzameling van n objecten te kiezen en hiervoor met combinatorische methoden afleiden:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots\ldots k} = \binom{n}{k}.$$

Vanuit didactisch oogpunt lijkt de tweede methode mooier. Maar in een aantal gevallen is de eerste methode eenvoudiger. Voor ons probleem zullen we beide methoden gebruiken.

Overzicht van het probleem

De opmerking dat

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$a^5 + b^5 + c^5 + 5abc(ab + ac + bc)$$

$$a^7 + b^7 + c^7 - 7abc(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

deelbaar zijn door $(a+b+c)$ is het beginpunt.
Is de rij voort te zetten? Wat kan de bedoeling van de vraag zijn? Laten we een wat ruime formulering kiezen. Alle inzenders zijn het er wel over eens dat we voor oneven waarden van n een functie F zoeken zodat

$a^n + b^n + c^n \pm n\, abcF(a, b, c)$ deelbaar is door $(a+b+c)$.
Maar aan welke eisen moet F voldoen? Duidelijk is dat F nooit eenduidig bepaald kan zijn, vermeerdering van een gevonden F met een willekeurig veelvoud van $(a+b+c)$ zal ook voldoen.
We formuleren nu een aantal eisen zoals we die expliciet of impliciet bij de inzenders vonden:

1 F moet een veelterm in a, b en c zijn.
2 F moet een symmetrische veelterm in a, b en c zijn.
3 De coëfficiënten van F moeten gehele getallen zijn.
4 F moet van de gedaante $a^kb^k + a^kc^k + b^kc^k$ zijn.
5 F moet een polynoom in $(ab + ac + bc)$ zijn.
6 F moet een som zijn van termen $(abc)^p(a^kb^k + a^kc^k + b^kc^k)$.
7 F moet een polynoom zijn in de elementair symmetrische functies $(ab + ac + bc)$ en abc.

Een eerste vraag is verder hoe men de eis 'moet deelbaar zijn door $(a+b+c)$' gaat gebruiken. Verschillende inzenders stellen voor de reststelling daarvoor te gebruiken. Een veelterm $G(a, b, c)$ is deelbaar door $(a+b+c)$ als $G(a, b, (-a-b)) = 0$. Hoewel deze methode het rekenwerk vereenvoudigt lijkt het niet verstandig deze methode te gebruiken als men aan voorwaarde 2 wil voldoen.
Ook kan men proberen een uitdrukking van $a^n + b^n + c^n$ in elementair symmetrische functies te vinden en dan modulo $(a+b+c)$ te rekenen, of eenvoudig $(a+b+c)$ gelijk aan 0 stellen.

Een eenvoudiger probleem

Hoewel we het niet expliciet bij inzenders opgemerkt vonden, is het niet ondenkbaar dat men eerst een analoog probleem voor twee letters a en b heeft bekeken.
In eerste opzet is dit triviaal:
$a^n + b^n$ is voor oneven n altijd door $a+b$ deelbaar.
Verder is $a^{2n} + b^{2n} + 2a^nb^n$ voor $n = 1, 3, 5, 7\ldots$ en is $a^{2n} + b^{2n} - 2a^nb^n$ voor $n = 2, 4, 6, 8, \ldots$ door $a+b$ deelbaar.
Maar we zouden hier dus meer kunnen vragen, bij voorbeeld of $a^n + b^n$ expliciet als functie van $a+b$ en ab te schrijven is. Dit soort opgaven werden in vroegere jaren wel bij de theorie van de vierkantsvergelijkingen op de HBS gesteld.
Het begin is duidelijk
$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$
$a^4 + b^4 = (a+b)^4 - 4ab(a+b)^2 + 2a^2b^2$
Hoe gaat dit verder?
Een speciaal geval is het geval dat a en b de wortels zijn van de vierkantsvergelijking
$x^2 - 2r\cos(f)x + r^2 = 0$.
Dan geldt $a + b = 2r\cos(f)$ en $ab = r^2$.
De stelling van Le Moivre leert
$a^n + b^n = (r\cos(f) + ir\sin(f))^n + (r\cos(f) - ir\sin(f))^n = 2r^n\cos(nf)$.
En het probleem is nu $\cos(nf)$ uit te drukken in $\cos(f)$.
(Een opmerking voor insiders: mocht de vierkantsvergelijking reële wortels hebben dan is een analoge formulering met hyperbolische functies mogelijk.)
We behandelen nog een stukje het algemene geval en

voeren in $a + b = A$, $ab = -B$ en $S_n = a^n + b^n$. Dan geldt:
$S_1 = A$
$S_2 = A^2 + 2B$
$S_3 = A^3 + 3AB$
$S_4 = A^4 + 4A^2B + 2B^2$
De vierkantsvergelijking is in dit geval $x^2 = Ax + B$.
Om deze rij voort te zetten kunnen we de eenvoudig af te leiden recurrente betrekking $S_{n+2} = AS_{n+1} + BS_n$ gebruiken.
De structuur van de formules is duidelijk, maar wat zijn de coëfficiënten? We schrijven ze voor een stukje in tabelvorm

1	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0
1	3	0	0	0	0
1	4	2	0	0	0
1	5	5	0	0	0
1	6	9	2	0	0
1	7	14	7	0	0
1	8	20	16	2	0
1	9	27	30	9	0

We kijken naar de kolommen. De tweede kolom zal vermoedelijk wel de rij van de natuurlijke getallen zijn. De derde kolom heeft als rij van verschillen de rij 3, 4, 5, 6, 7. Dus vermoedelijk is de tweede kolom een rekenkundige rij van de tweede orde waarvan de termen door een kwadratische formule in n gegeven worden. Met wat experimenteren blijkt $\frac{1}{2}n(n-3)$ te voldoen. Deze formule is ook nog goed voor $n = 3$.
De vierde kolom is nog maar kort. Zullen we het wagen er een rekenkundige reeks van de derde orde voor te stellen? De formule $\frac{1}{6}n(n-5)(n-4)$ voldoet aan de uitkomsten op de vierde tot en met de negende regel. Heel veel brutaliteit (of wat langer experimenteel werk, dat met de computer niet zo moeilijk is) laat ons vermoeden dat de $(k+1)$-ste coëfficiënt in de n-de regel gelijk is aan

$$\frac{n(n-2k+1)(n-2k+2)\ldots\ldots(n-k-1)}{1.2.3\ldots\ldots k}.$$

En u zult het niet geloven, nu is de algemene formule met volledige inductie te bewijzen!

Het gestelde probleem

Als u de lectuur nog niet opgegeven hebt zult u wel verontwaardigd zijn over de lange uitwijding over een ander probleem dan het gestelde. Didactisch onverantwoord? Maar u leest deze regels nog dus hebben we moed nu aan het echte probleem te beginnen.

We voeren een paar afkortingen in om op een uniforme manier over de inzendingen te kunnen berichten. Het blijkt dat handige notaties je soms in de richting van een interpretatie sturen.
$A = a + b + c$
$B = -(ab + ac + bc)$
$C = abc$
$S_n = a^n + b^n + c^n$
$T_n = (-1)^n(a^nb^n + a^nc^n + b^nc^n)$.

De vraag komt neer op het zoeken van twee functies van a, b en c zodat
$S_n = n.C.F(a, b, c) + A.G(a, b, c)$
We merkten boven al op dat F en G door deze vraagstelling niet eenduidig bepaald zijn. De factor n heeft natuurlijk alleen zin als we in F alleen gehele getallen als coëfficiënten willen toelaten. Modulo n rekenen leert ons dat $(a + b + c)^n$ modulo n met $a^n + b^n + c^n$ congruent is als n een priemgetal is. De optredende multinomiaal coëfficiënten zijn namelijk voor het priemgetal n door n deelbaar.

Verder merken we op dat a, b en c opgevat kunnen worden als de wortels van de derdegraads vergelijking
$X^3 = AX^2 + BX + C$.
Substitutie van de wortels in deze vergelijking, vermenigvuldiging met de n-de macht van de wortel en optelling geeft de recurrente betrekking
$S_{n+3} = AS_{n+2} + BS_{n+1} + CS_n$.
En hiermee zijn met computeralgebra direct uitdrukkingen voor S_n als functie van A, B, C te vinden.
Even een begin; we rekenen modulo A:
$S_3 = CS_0 = 3C$
$S_5 = BS_3 + CS_2 = C(BS_0 + S_2)$
$S_7 = BS_5 + CS_4 = C(B^2S_0 + BS_2 + S_4)$
Het vermoeden rijst dat modulo A geldt:

$$S_{2k+3} = C(B^kS_0 + B^{k-1}S_2 + B^{k-2}S_4 + \ldots\ldots + BS_{2k-2} + S_{2k}).$$

En dit is direct met volledige inductie te bewijzen. We hebben nu de som van de $(2k+3)$-de machten geschreven als een veelvoud van abc en een symmetrisch polynoom in a, b en c. Dat de coëfficiënten voor een priemgetal $2k+3$ deelbaar door dit priemgetal zijn is niet direct duidelijk. Ook is de vorm van F niet direct een generalisatie van de gegeven vormen voor 5 en 7. Hoewel we bij verschillende inzenders aanzetten voor deze oplossing vonden bleek hij de inzenders niet te bevredigen.
Omdat in de opgave alleen sprake is van S_n voor oneven n zou het de moeite waard kunnen zijn voor de sommen van oneven machten een recurrente betrekking te vinden. Natuurlijk zullen we ook modulo A reduceren.

Eén van de inzenders vermeldt deze recurrente betrekking modulo A:
$S_{2n+7} = 2BS_{2n+5} - B^2S_{2n+3} + C^2S_{2n+1}$.

Verschillende inzenders proberen aan de vierde of zesde eis van het lijstje in het voorwoord te voldoen.
Dat wil zeggen men probeert de functie F in de vorm T_k te gieten of men probeert de functie F voor te stellen als een som van factoren C^mT_k, waarbij $3m + 2k = n - 3$.
Eenvoudig rekenen modulo A leert
$S_1 = 0$
$S_3 = 3C$
$S_5 = 5CT_1$
$S_7 = 7CT_2$
$S_9 = 9CT_3 + 30C^3$
$S_{11} = 11CT_4 + 55C^3T_1$
$S_{13} = 13CT_5 + 91C^3T_2$
$S_{15} = 15CT_6 + 140C^3T_3 + 378C^5$.
De voortzetting met de eis 4, namelijk dat F gelijk zou zijn aan een term T_k met $k = \frac{1}{2}(n-3)$ is dus niet mogelijk voor 9 tot en met 15. Men kan bewijzen dat deze voorstelling alleen mogelijk is in de boven genoemde gevallen 3, 5 en 7.
De voorstelling gebruikmakend van de voorwaarde 6 lijkt voor de functie F te voeren tot de vraag naar de coëfficiënten in de opvolgende machten. Het lukte een van de inzenders een expliciete formule voor deze coëfficiënten te vinden, maar het leek alleen mogelijk deze met volledige inductie te bewijzen. We merken hier alleen op dat $55 - 30 = 25$; $91 - 55 = 36$; $140 - 91 = 49$ opvolgende kwadraten zijn, maar dat kan natuurlijk toeval zijn. Al moeten we eerlijk bekennen dat we toch even door zijn gaan rekenen en dit patroon bleef bestaan. Misschien komen we aan het einde van dit verhaal hier nog op terug.

De voorwaarde 7

Omdat we een recurrente betrekking vonden waardoor S_n modulo A direct als functie van B en C te bepalen is, lijkt deze aanpak meer succes te kunnen hebben.
We merken daarbij nog op dat $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$ modulo A congruent is met B^2.
Eenvoudig rekenen leert

$S_0 = 3$
$S_1 = 0$
$S_2 = 2B$
$S_3 = 3C$
$S_4 = 2B^2$
$S_5 = 5BC$
$S_6 = 2B^3 + 3C^2$
$S_7 = 7B^2C$
$S_8 = 2B^4 + 8BC^2$
$S_9 = 9B^3C + 3C^3$

De structuur van deze rij is duidelijk, voor even waarden van n zijn het sommen van termen B^sC^t met $2s + 3t = n$ en even t. Voor oneven waarden van n zijn het sommen van termen B^sC^t met $2s + 3t = n$ en oneven t.
We geven nu een tabel van de coëfficiënten in het oneven geval:

$n \backslash s$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1												
3	3											
5		5										
7			7									
9	3			9								
11		11			11							
13			26			13						
15	3			50			15					
17		17			85			17				
19			57			133			19			
21	3			147			196			21		
23		23			322			276			23	

Tabel 1:
coëfficiënten van B^sC^t in S_n, waarbij n oneven is en $2s + 3t = n$

Het is weliswaar wat vervelend cijferwerk, maar natuurlijk ook eenvoudig met de computer te doen. Wie met de hand rekent heeft iedere keer bij het bereiken van een priemwaarde voor n de fraaie controle van de deelbaarheid van alle coëfficiënten door dat priemgetal.
Maar is er regelmaat in de coëfficiënten te vinden? De meeste inzenders, die deze weg bewandelden, gaven op dit ogenblik op.
Het gedrag van de getallen in de bovenste diagonaal is duidelijk. In de eerste daaropvolgende diagonaal lezen we 3, 11, 26, 50, 85, 133, 196, 276. De rij van de verschillen in deze nevendiagonaal is 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80. Voor fijnproevers direct duidelijk een rij met verschillen 7, 9, 11, 13, 15, 17 en nu zijn we bij een rekenkundige rij. De oorspronkelijke rij zal dus een rekenkundige rij van de derde orde kunnen zijn. Uit de eerste termen van de rij kunnen we de coëfficiënten vinden, het wordt als we invoeren $n = 2k + 1$

$$\tfrac{1}{6}n(k-3)(k-2) = \tfrac{1}{24}n(n-7)(n-5)$$

Het ligt voor de hand voor de volgende nevendiagonaal nu een rekenkundige rij van de vijfde orde te veronderstellen. Het is weer rekenwerk om het voor het beginstuk passend te krijgen, maar we zouden een gokje kunnen wagen en veronderstellen dat voor $n = 7, 9, 11$ en 13 de formule 0 moet opleveren. Ons gokje wordt beloond:

$\frac{1}{120}n(k-6)(k-5)(k-4)(k-3) =$
$\frac{1}{1920}n(n-13)(n-11)(n-9)(n-7)$

past voor $n = 7, 9, 11, 13, \dots, 23$.

Met weer wat stoutmoedig generaliseren van vermoede structuren wagen we de veronderstelling dat de algemene coëfficiënt gegeven zal worden door

$$\frac{n(k-m)(k-m-1)\dots(k-3m+3)}{(2m-1)!}$$

En met volledige inductie is alles te bewijzen. Het is eerlijk waar dat dit op deze manier gevonden is. Maar er is wel heel wat geluk aan te pas gekomen.
Wanneer we de formule goed bekijken kunnen we de coëfficiënt van B^sC^t met $2s + 3t = n$ ook schrijven als

$$\frac{n(s+t)!}{(s+t)s!t!}$$

Zouden binomiaal coëfficiënten toch een rol spelen? De eerder gemaakte opmerking over het optreden van de factor n voor n een priemgetal wees in die richting.

Een alternatieve methode

Enkele inzenders merkten op dat met voortbrengende functies wel wat te bereiken zou zijn. We laten even zien wat deze suggestie oplevert.
Een inzender leidt de voortbrengende functie uit de recurrente betrekking af en vindt daarmee de oplossing, die we hieronder op een klein beetje andere manier vermelden. We werken, zoals in de combinatoriek gebruikelijk, met formele machtreeksen, we hoeven ons dan niet om convergentie te bekommeren.
We voeren een voortbrengende functie in door de definitie

$$F(t) = \sum(a^n + b^n + c^n)t^n = \sum a^n t^n + \sum b^n t^n + \sum c^n t^n$$

$$= \frac{1}{1-at} + \frac{1}{1-bt} + \frac{1}{1-ct}$$

$$= \frac{3-2At-Bt^2}{1-At-Bt^2-Ct^3}$$

We gaan nu modulo A rekenen, dan worden de formules vereenvoudigd tot

$$F(t) = \frac{3-Bt^2}{1-Bt^2-Ct^3}$$

We ontwikkelen nu $(1-x-y)^{-1} = 1 + (x+y) + (x+y)^2 + (x+y)^3 \dots\dots$

Passen we dit toe op $(1-Bt^2-Ct^3)^{-1}$ dan vinden we

$$F(t) = (3-Bt^2)\{1 + (Bt^2+Ct^3) + (Bt^2+Ct^3)^2 \dots\dots\}$$

$$= 3 + \sum_{n=2}^{\infty} n \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ 2k+3l=n}} \frac{(k+l-1)!}{k!l!} B^k C^l t^{2k+3l.}$$

Uit de vorm voor de voortbrengende functie vinden we direct de waarde van S_n modulo A expliciet als functie van B en C:

$$S_n = n \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ 2k+3l=n}} \frac{1}{k+l} \frac{(k+l)!}{k!l!} B^k C^l \qquad (n \geq 2)$$

We merken nog op dat de reductie modulo A, door onze probleemstelling ingegeven, hier geen wezenlijke vereenvoudiging brengt. Dat wil zeggen dat we eenvoudig de gedaante van S_n als veelterm in A, B en C kunnen geven.
We moeten dan de multinomiale formule

$$(x+y+z)^m = \sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+j+k=m}} \frac{m!}{i!j!k!} x^i y^j z^k \quad \text{gebruiken.}$$

Het eindresultaat wordt:

$$S_n = n \sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+2j+3k=n}} \frac{1}{i+j+k} \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!} A^i B^j C^k \qquad (n \geq 1)$$

En hieruit zijn direct F en G uit ons probleem af te lezen.

Nog onopgeloste vragen

In de bovenstaande paragraaf vonden we een eenvoudige formule voor de voortbrengende functie

$$F(t) = \sum S_n t^n$$

Op geheel analoge manier kunnen we een formule voor de voortbrengende functie

$$G(t) = \sum T_n t^n$$

vinden. Na enig rekenen vinden we

$$T_n = n \sum_{\substack{i,j,k\geq 0\\ i+2j+3k=n}} \frac{(-1)^{j+k}}{i+j+k} \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!} A^j B^i C^{j+2k} \quad (n \geq 1)$$

We hebben nu zowel S_n als T_n expliciet als veelterm in A, B en C geschreven.
Omdat alle formules homogeen in de variabelen a, b en c

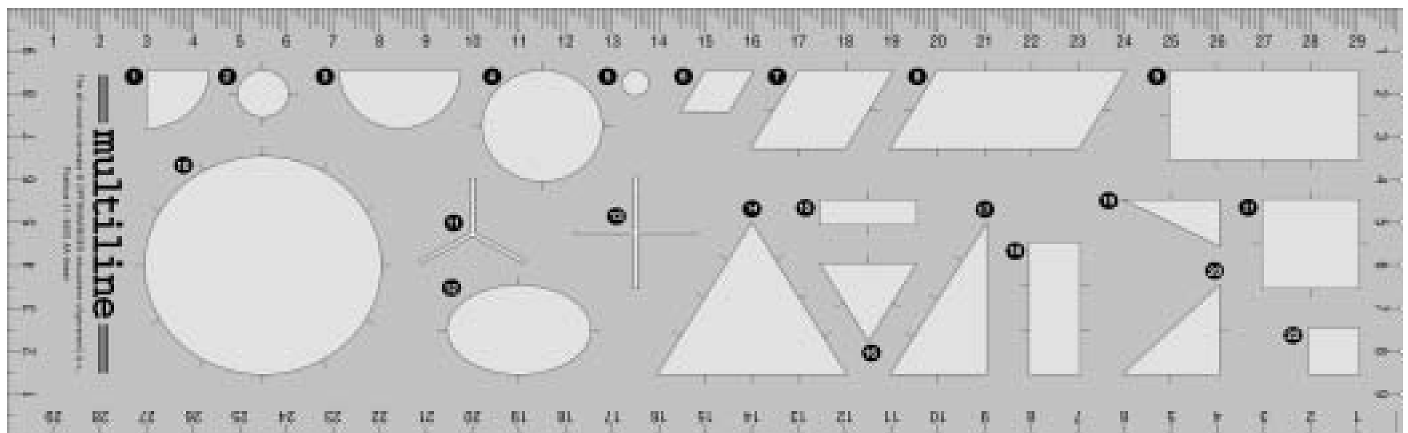
zijn mogen we zonder de algemeenheid te schaden veronderstellen $C = 1$. Wanneer we weer modulo A reduceren vinden we

$$S_n = n \sum_{\substack{j,\,k \geq 0 \\ 2j+3k=n}} \frac{(j+k-1)!}{j!k!} B^j \qquad (n \geq 2)$$

en

$$T_n = n \sum_{\substack{i,\,k \geq 0 \\ i+3k=n}} \frac{(-1)^k (i+k-1)!}{i!k!} B^i \qquad (n \geq 1)$$

We hebben nu zowel S_n als T_n geschreven als polynomen in B.
In een vorige paragraaf probeerden we met enkele inzenders S_n te schrijven als een som van termen T_m, bij oneven n met toevoeging van factoren die een geschikte macht van C zijn.
In onze nieuwe formulering, nog steeds modulo A rekenend met de extra veronderstelling $C = 1$ moeten we uit de polynoom-relaties voor S_n en T_n de B proberen te elimineren en zo S_n als een som van de T_m schrijven.
Eén van de inzenders heeft opgemerkt dat de nu optredende coëfficiënten in de kolommen gerangschikt weer rekenkundige reeksen van hogere orde zijn. Uit een paar voorbeelden is de algemene vorm te raden en dan zal een bewijs met volledige inductie het werk kunnen voltooien.
Het gelukte ook ons nog niet een ‘mooi’ bewijs voor deze zaak te vinden.
Daar zowel de S_n als de T_n polynomen in B zijn is het een probleem van lineaire algebra om S_n te schrijven als lineaire combinatie van de T_m. Het probleem is, wat geleerd gezegd, een inverse van een oneindig dimensionale matrix te vinden en deze te vermenigvuldigen met een andere oneindig dimensionale matrix. We zien er vanaf dit program uit te voeren. Het is eerlijk waar dat dit op deze manier gevonden is. Maar er is wel heel wat geluk aan te pas gekomen.



Boekbesprekingen

Op de website van de vereniging staan allerlei boekbesprekingen.
www.nvvw.nl/besprekingen.html



Laura T. Rigatelli
Evariste Galois 1811 – 1832
Translated in English by John Denton
Birkhäuser Verlag, 1996
160 p., DM 38,-

Samenzwering, revolutie, vurige liefde voor het vaderland, onbeantwoorde liefde, geniale wiskundige theorieën en ontdekkingen, miskenning door de gevestigde wiskundige elite, een gewelddadige dood nog voor zijn 21-ste verjaardag: het zijn ideale ingrediënten voor een roman, film of theaterproductie over het leven van de beroemde, jonggestorven wiskundige Evariste Galois.
Lastiger is het om een goed gedocumenteerde biografie over het leven van Galois te schrijven, die teruggaat op originele bronnen uit het Frankrijk van het begin van de 19de eeuw. Dit laatste heeft de Italiaanse hoogleraar in de geschiedenis van de wiskunde Laura Rigatelli gedaan. Het boek is in een Engelse vertaling verschenen als deel 11 in de serie Vita Mathematica van de Zwitserse uitgever Birkhäuser. Voor lezers die geïnteresseerd zijn in de voorgaande delen in deze serie biografieën van wiskundigen: bijna alle delen zijn in het Duits, er is nog één ander deel in het Engels (over Norbert Wiener) en één in het Frans (over André Weil).
Het boek is goed verzorgd, niet heel duur (DM 38) en het geeft in 160 bladzijden een minutieus getekend beeld van het leven van Galois in het rumoerige Parijs van de jaren rond 1830. Juist in dat jaar vond de bloedige revolutie plaats, waarbij de laatste Bourbon koning verjaagd werd en de 'burgerkoning' Louis Philippe aan de macht kwam. Deze gebeurtenissen hadden een zeer grote impact op het leven van de jonge Galois en zijn familie.
Galois' vader was burgemeester van een klein voorstadje van Parijs, raakte door politiek gekonkel zijn baan kwijt en pleegde zelfmoord. Galois zelf was zeer actief in de revolutionaire republikeinse beweging, en volgens Rigatelli was zijn (zelfgekozen) dood een onderdeel in een complot om een opstand van het volk tegen de machthebbers te forceren. Dat hij überhaupt de tijd en vooral de rust kon opbrengen om in die paar jaar een wiskundig oeuvre bij elkaar te schrijven, mag een wonder heten. De kritische editie van zijn verzamelde publicaties en manuscripten uit 1962 beslaat 541 pagina's! Het laatste hoofdstuk van het boek van mevr. Rigatelli is trouwens een overzicht van het wiskundige werk van Galois, met uitgebreide citaten uit het werk zelf. Helaas wreekt zich hier, dat de Engelse vertaler van het boek geen wiskundige is: nogal onbeholpen vertalingen van wiskundige termen duiken op. Zo wordt een zuiver periodieke kettingbreuk een 'immediately periodic continuous fraction' in plaats van een 'purely perodic continued fraction'.
Het boek eindigt met een zeer uitgebreide bibliografie, waarin behalve biografische studies over Galois' leven en studies over het werk van Galois, ook de romans, films en theaterstukken over Galois opgenomen zijn.
Door bovenbouwleerlingen zou dit boek gebruikt kunnen worden als belangrijkste bron bij een werkstuk over Galois' leven en werk. Voor wiskundeleraren en andere wiskundigen is het heel interessant om te lezen onder welke penibele omstandigheden de eerste aanzet tot de moderne abstracte algebra gegeven werd en hoe deze door de toenmalige wiskundige wereld ontvangen werd.

Rob Potharst

De Nationale Doorsnee

dinsdag 10 oktober 2000

Zit de gemiddelde leerling van Nederland bij u in de klas?

Is uw klas de gemiddelde klas van Nederland?

Voorspelt een van uw leerlingen hoe de gemiddelde leerling van Nederland eruit ziet?

U denkt van niet?
Denken is echter niet genoeg. U weet als geen ander; meten is weten. Om dus te ontdekken of uw klas de gemiddelde klas van Nederland is moet er gemeten worden. Gelukkig hoeft u dat niet zelf te doen. Uw leerlingen zullen zelf het onderzoek verrichten en zo deelnemen aan dit speciaal ontwikkelde statistiekproject ter gelegenheid van het Wereld Wiskunde Jaar 2000.

Door onderzoek te doen naar de gemiddelde leerling van Nederland worden meerdere vliegen in één klap gevangen. De leerlingen passen spelenderwijs statistiek toe binnen de kerndoelen, de computer wordt geïntegreerd in de les en voor u is het een welkome afwisseling op de bestaande lesstof.

Waarom gaat u meedoen?

Uniek aan dit project is, dat alle deelnemende scholen op hetzelfde moment de op school verzamelde data doorsturen naar het CBS. Daar vindt op professionele wijze de centrale dataverwerking plaats. Dat levert een prachtige dataverzameling op, waar u en uw leerlingen een steentje aan hebben bijgedragen.
Als school houdt u er ook iets aan over: een datacollectie van de eigen school en aanvullend lesmateriaal dat u kunt hergebruiken in uw statistiek-onderwijs.

Uw leerlingen zullen graag willen meedoen omdat het project is opgezet als wedstrijd waarin ‘vette’ prijzen te winnen zijn.

Statistiek is knowledge science en bevredigt nieuwsgierigheid.

Dus:……bent u al nieuwsgierig?

Belangrijk om te weten is dat alle leerlingen van de brugklassen en de tweede klassen (kunnen) meedoen aan deze nationale wedstrijd.
Ook handig om te weten is dat het project **De Nationale Doorsnee** heet, plaats zal vinden in de wetenschapsweek op **dinsdag 10 oktober 2000** en dat u nog veel meer informatie zult ontvangen.

De Nationale Doorsnee komt mede tot stand dankzij bijdragen van de Stichting WeTen, het CBS, het Freudenthal Instituut en het APS. Het is geïnitieerd door de NVvW ter gelegenheid van haar 75-jarig bestaan.

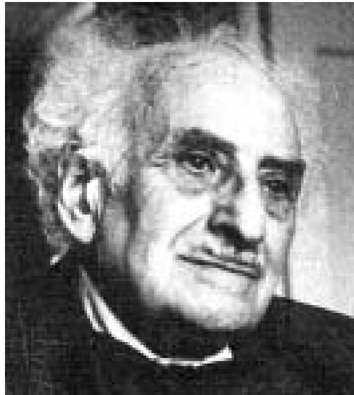
Contactpersoon: Philip van Schaik

P.vanSchaik@fi.uu.nl
Freudenthal Instituut
(030)261 16 11 (op wo-do-vr).

Honderd jaar wiskunde-onderwijs (6)

Van CMLW tot Freudenthal Instituut

In het Jubileumboek wordt, natuurlijk, een hoofdstuk opgenomen over dat bijzondere instituut in Utrecht, het Freudenthal Instituut. Zulke instituten zijn er niet veel op de wereld. Hoe kan het dat in Nederland wel zo'n instituut tot stand kwam?
De voorgeschiedenis begint al eind jaren '50. De Russen lanceerden de allereerste 'kunstmaan', in de Verenigde Staten schrok men daarvan. Het Spoetnik-effect was geboren, een achterstand moest worden ingelopen. Ook in Europa werden de krachten gebundeld. In november 1959 vond te Royaumont bij Parijs een conferentie plaats, georganiseerd door de Organisatie voor Europese Economische Ontwikkeling (OEES). Daar werd onder meer de vloer aangeveegd met het traditionele meetkundeprogramma.
Als vervolg op de conferentie te Royaumont werd in 1961 de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde (CMLW) opgericht. De CMLW moest de kloof tussen de universitaire wiskunde en de schoolwiskunde dichten, de afstand was te groot geworden. Er moest een nieuw leerplan komen.
Van meet af aan heeft Freudenthal, zelf lid, zich actief met het werk van de CMLW bezig gehouden. Hij verbreedde de aandacht naar de onderbouw en stimuleerde dat er een subcommissie voor het basisonderwijs



Prof.dr. H. Freudenthal (1905-1990)

werd gevormd, na initiatieven daartoe van buiten de CMLW. Zo ontstond de subcommissie Wiskobas. Het ging Freudenthal om verbetering van het wiskundeonderwijs, zoals hij zelf zei, niet zozeer om een nieuw leerplan. Er werden medewerkers aangetrokken om uitwerking te geven aan de gevormde ideeën. Zo werd de CMLW een bedrijf, al was het formeel alleen een adviescommissie. In 1971 ging de staatssecretaris accoord met de oprichting van een instituut. Dit werd het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO), verbonden aan de universiteit van Utrecht, met Freudenthal als hoogleraar-directeur. Het IOWO breidde zijn activiteiten uit. In 1973 werd Wiskivon opgericht als afdeling voor het voortgezet onderwijs. En er kwam een onderwijscomputercentrum (OC).
Het IOWO werkte geïntegreerd, dat wil zeggen leerplanontwikkeling, toetsing, opleiding, nascholing, didactiek, alle aspecten werden in samenhang aangepakt. Uiteraard was veel onderzoek nodig; dat begon met observaties in de klassen. In 1975 verscheen voor het eerst de Wiskrant, als uitgave van Wiskivon. In de jaren daarna verschenen experimentele leerstofpakketjes voor lbo t/m vwo, die in klassen werden uitgeprobeerd. Ook werd samengewerkt met de Hewet-commissie, die een nieuw leerplan moest maken voor de bovenbouw van het vwo.
Maar intussen dreigde de opheffing van het IOWO, dat niet paste in de structuur die onderwijskundigen hadden bedacht. Het geïntegreerd werken zou juist niet goed zijn; voor de genoemde aspecten werden afzonderlijke instanties beter geacht. Op 31 december 1980 werd de opheffing van het IOWO een feit, al bleven enkele medewerkers in Utrecht verbonden aan een onderzoeksinstituut, het OW&OC. Het Hewet-project, waarin wiskunde A en wiskunde B op poten werden gezet, was een sterk argument geweest om niet alle activiteiten stop te zetten. In 1981 kwam de Nieuwe Wiskrant uit. Geleidelijk ontstond een professionele samenwerking met de Stichting voor de Leerplanontwikkeling (SLO) en met de pedagogische centra. Telkens wanneer leerplanwijzigingen aan de orde waren speelde het OW&OC een hoofdrol. Het aantal medewerkers was gaandeweg weer uitgebreid en tegenwoordig is het Freudenthal Instituut – zoals de naam sinds 1991 luidt – ook in het buitenland actief.
Freudenthal was in 1976 als hoogleraar-directeur opgevolgd door Van der Blij, die op zijn beurt deze functie in 1988 overdroeg aan Jan de Lange. In hoofdstuk 28 van het Jubileumboek *Honderd jaar wiskundeonderwijs* beschrijven Edu Wijdeveld, Heleen Verhage en George Schoemaker op basis van eigen ervaringen de geschiedenis van een bijzonder instituut.

Redactiecommissie Jubileumboek

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Eerste aankondiging

Dit is een eerste aankondiging voor het lustrumcongres en de jaarvergadering 2000 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Dit jaar bestaat de Vereniging 75 jaar. Bovendien is 2000 uitgeroepen tot het jaar van de wiskunde. Vandaar dat we dit jaar een uitgebreide en feestelijke jaarvergadering/studiedag organiseren. Om het bijzonder te maken wordt het een tweedaags lustrumcongres, inclusief de mogelijkheid tot overnachten.
Dit congres organiseert de NVvW samen met de **Faculteit Wiskunde en Informatica van de Universiteit van Utrecht** en de **Hogeschool van Utrecht.**

Reserveer de volgende data en tijden in uw agenda:
vrijdag 17 november 2000 vanaf 15:30 uur tot en met zaterdag 18 november 2000 16:00 uur.

Ook de plaats van handeling is van een feestelijk tintje voorzien, de locatie is het Educatorium van de Universiteit van Utrecht, te Utrecht.

Jaarvergadering Lustrumcongres 2000

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Het thema van dit congres is:

Wiskundeonderwijs over de grens

Met drie subthema's:

wiskundeonderwijs over de **lands**grenzen

wiskundeonderwijs over de **vak**grenzen

wiskundeonderwijs over de **tijd**sgrenzen

De lustrumcommissie is volop bezig met het programma. Een tip van de sluier kunnen we al wel oplichten: het programma bestaat onder andere uit een aantal plenaire lezingen, workshops, de presentatie van het jubileumboek, een verrassend vrijdagavondprogramma dat u beslist niet mag missen en natuurlijk de jaarvergadering van de NVvW.
In een van de volgende nummers van Euclides volgt er een uitvoeriger aankondiging en in het eerste Euclidesnummer van het lustrumjaar staat de aanmeldingsprocedure uitvoerig beschreven.

Inlichtingen:
Marianne Lambriex
tel. overdag 040-2415380
tel. 's avonds 0497-517781
email: m.lambriex@nvvw.nl

Namens de congrescommissie,
Marianne Lambriex

Examenbesprekingen in mei 2000

VBO/MAVO-C/D dinsdag 30 mei 2000
van 15.00 - 18.00 uur

Plaats	*Gespreksleider*
ALKMAAR	
OSG Willem Blaeu	mw. B. v.d. Tuin
Robonsbosweg 11	0229-218245
072-5122477	tuinjw@tref.nl
AMSTERDAM	
CSG Buitenveldert	mw. C.E. Gaykema
De Cuserstraat 3	020-6131802
020-6423902	pascal03@svm.nl
(CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51)	
GRONINGEN	
Zernike College	dhr. J. Rijnaard
Bordewijklaan 34	050-5254709
050-5266866	
(station buslijn 5)	
'S-HERTOGENBOSCH	
Ds. Pierson College	mw. M. Lambriex-
G. ter Borchstraat 1	van der Heijden
073-6442929	
(NS Den Bosch-OOST)	
ROTTERDAM	
Geref. Sg. Randstad	C: dhr. W. de Jager
Valenciadreef 15	0184-683829
010-4552511	D: dhr. H. Entrop
(NS Alexanderpolder)	
BURGUM	
CSG Liudger	dhr. T. de Groot
Tj.H. Haismastraat 1	
0511-460260	
ZEIST	
KSG De Breul	dhr M. Westland
Arnhemsebovenweg 98	035-5420849
030-6915604	
ZWOLLE	
Thorbecke SG	dhr. R. Kronenberg
Dr. C.A. van Heesweg 1	038-4210044
038-4564540	

HAVO-A maandag 29 mei 2000
van 16.00 - 18.00 uur

HAVO-B donderdag 25 mei 2000
van 18.30 - 20.30 uur

Voor Tweede Fase **Havo A12, B1 en B12** zie volgende pagina.

Plaats	*Gespreksleider*
AMERSFOORT	
De Amersfoortseberg	A: dhr. A.B. v.d. Roest
Hugo de Grootlaan 25	0318-543167
033-4618845	B: dhr. H.P. van Kampen
	035-6922318
AMSTERDAM	
CSG Buitenveldert	A: dhr. H. Rozenhart
De Cuserstraat 3	072-5716448
020-6423902	B: mw. G.W. Fokkens
	020-6438447
(CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51)	
ARNHEM	
Stedelijk Gymnasium Arnhem	A: dhr. H. Rutten
	024-3240637
Statenlaan 8	B: dhr. L.H. Rietveld
026-4423025	055-5419287
(NS Velperpoort)	
GOES	
Buys Ballot College	A: dhr. F. van Lamoen
Bergweg 4	0113-230878
0113-213010	
'S-GRAVENHAGE	
Hofstad Lyceum	A: dhr. J.P.C. van der Meer
Colijnplein 9	B: dhr. T.M. Pronk
070-3687670	0174-419038
GRONINGEN	
Röling College	A: mw. H. Lüder
Melisseweg 2	0516-432889
050-5474141	B: dhr. J. Tolboom
	050-5776928

’S-HERTOGENBOSCH

Ds. Pierson College	A: dhr. W.J.M. Laaper
G. ter Borchstraat 1	040-2867720
073-6442929	B: dhr. C.J.M. Nienhuis
(NS Den Bosch-OOST)	0411-678501

ROTTERDAM

Geref. Sg. Randstad	A: dhr. R.E. Houweling
Valenciadreef 15	0180-315302
010-4552511	B: dhr. B.L.G.P. Hillebrand
(NS Alexanderpolder)	0180-515210

ZWOLLE

Van der Capellen SG	A: dhr. G. Hajee
Lassuslaan 230	0571-271542
038-4225202	B: dhr. J.P. Scholten
	053-4768791

VWO-A vrijdag 19 mei 2000
van 16.00 - 18.00 uur

VWO-B maandag 29 mei 2000
van 18.30 – 20.30 uur

Plaats *Gespreksleider*

AMERSFOORT

De Amersfoortseberg	A: dhr. C. Brouwer
Hugo de Grootlaan 25	0341-460552
033-4618845	B: dhr. F.W. Zwagers
	033-4752341

AMSTERDAM

CSG Buitenveldert	A: dhr. S.T. Min
De Cuserstraat 3	0229-237756
020-6423902	B: dhr. B. Giskes
	0299-655525

(CS tram 5; CS en Amstel sneltram 51)

ARNHEM

Stedelijk Gymnasium	A: dhr. P.J. Donkelaar
Arnhem	055-5341611
Statenlaan 8	B: dhr. G.A.J. Voetelink
026-4423025	026-3886258
(NS Velperpoort)	

GOES

Buys Ballot College	A: dhr. S. Garst
Bergweg 4	0187-642177
0113-213010	

’S-GRAVENHAGE

Hofstad Lyceum	A: dhr. C.D. Hendriks
Colijnplein 9	0174-620131
070-3687670	B: dhr. R.J. Klinkenberg
	070-3559938

GRONINGEN

Röling College	A: dhr. L. Tolboom
Melisseweg 2	050-3146093
050-5474141	B: mw. H. Lüder
	0516-432889

’S-HERTOGENBOSCH

Ds. Pierson College	A: dhr. H.J. Kruisselbrink
G. ter Borchstraat 1	073-5216386
073-6442929	B: dhr. A.L.P. van Merode
(NS Den Bosch-OOST)	0162-313746

ROTTERDAM

Geref. Sg. Randstad	A: dhr. C. Rijke
Valenciadreef 15	078-6194286
010-4552511	B: dhr. B.L.G.P. Hillebrand
(NS Alexanderpolder)	0180-515210

ZWOLLE

Van der Capellen SG	A: dhr. H. Schutjes
Lassuslaan 230	0529-427306
038-4225202	B: dhr. A.T. Sterk
	055-3666466

Examenbesprekingen Tweede Fase Havo A12, B1 en B12 Een klein aantal scholen zal dit jaar voor het eerst de Tweede Fase examens havo A12, B1 en B12 afnemen. Ook voor hen zal dit jaar door de NVvW een examenbespreking worden georganiseerd.

Havo B1 en B12
woensdag 24 mei, 19.00 - 21.00 uur
Jaarbeurs, Utrecht

Havo A12
vrijdag 26 mei, 19.00 - 21.00 uur
Jaarbeurs, Utrecht

Wij verzoeken u zich hiervoor uiterlijk 15 mei op te geven bij de voorzitter van de NVvW
schriftelijk:
M. Kollenveld, Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
of per e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
U ontvangt geen bevestiging van aanmelding.
De bespreking is toegankelijk voor leden van de Vereniging en voor hen die zich bij de aanmelding opgeven als lid. In verband met de zaalruimte worden alleen de eerste 45 aanmeldingen geplaatst.

In memoriam **Gerrit van den Heuvel**

Een schok gaat door je heen. Een collega zet op de mail: gisteren bereikte ons het bericht van het plotselinge overlijden op 7 januari van Gerrit van den Heuvel. Gerrit is er niet meer. Dat kan toch niet zo zijn. Je leest nog eens en staart dan in de ruimte. Eind december liepen we samen nog van het Freudenthal Instituut naar station Overvecht en treinden naar het Centraal station. Voldoende tijd om van gedachten te wisselen over ontwikkelingen rond de wiskunde. De zwakke leerling en het leerwegondersteunend onderwijs, ontwikkelingen binnen het vmbo. Er zou nog veel moeten gebeuren. Enthousiast ontwikkelt Gerrit een paar lijnen, zoekend naar de beste invulling. Wie hem kent weet dat hij niet zomaar wat zei. Zijn spreken inspireert. Een docent met het hart op de goede plek. Een man met een zwak voor de zwakke leerling. Een ontwikkelaar van materiaal, zorgvuldig gewogen. We kennen hem uit de W12-16 periode. Hij was er altijd en zijn constructieve bijdragen volgen hem. Als docenten hebben we kennis mogen maken met zijn creativiteit in al het nagelaten materiaal.
Nooit deed je tevergeefs een beroep op hem. Een regionale bijeenkomst en niet te vergeten de jaarvergadering van de Vereniging: Gerrit was er en boeide velen met zijn kennis en met de rustige wijze van presenteren. Luisterend naar anderen. In Utrecht vroeg hij me nog naar de gezondheid van mijn vrouw. Ook dat was Gerrit. Een man die in zijn leven veel verdriet en zorg heeft moeten verwerken had aandacht voor de persoon van de ander. Een mens voor de ander.
Voor me ligt: Wiskunde in examendossier vmbo, uitgave SLO. Ook hier een bijdrage van Gerrit. Zijn bijdrage: Wiskunde en gezondheid. Geschreven door een man die een zorg, als gevolg van kinderverlamming, al de jaren van zijn leven heeft moeten dragen. Wie kent niet de markante verschijning van Gerrit?
We zullen hem niet gauw vergeten. De Vereniging is veel dank aan hem verschuldigd voor zijn betekenis voor het wiskundeonderwijs. We gaan zonder Gerrit verder en hopen verder te werken aan waar we samen over hebben gesproken en waar we samen aan zouden werken. In het Freudenthal Instituut spraken we over de aandacht voor het vmbo en de wiskunde. Het valt ons zwaar om die draad op te pakken maar we zijn het aan hem verplicht.
We hopen dat zijn vrouw en kinderen, die het gemis het meest intens ervaren, de moed zullen ontvangen om verder te kunnen leven. Onze gedachten gaan ook naar hen uit en we wensen Gerda en de kinderen veel sterkte.

Wim Kuipers

Loopbaanoriëntatie en begeleiding in de vakles

De praktijk van studievoorlichting en beroepskeuzevoorbereiding in het (voortgezet) onderwijs is aan het veranderen. De huidige maatschappij vraagt andere strategieën van toekomstige deelnemers, leerlingen dus. In de voorbereiding op de toekomst, meer specifiek op de wereld van arbeid en beroep, gaat de traditionele decaan steeds meer een tweedelijns functie vervullen, terwijl de vakdocenten en mentoren een veel centralere positie krijgen in het proces van loopbaanoriëntatie (LOB). Vakdocenten spelen een sleutelrol bij het dusdanig aanbieden van leerstof dat de leerlingen een gedifferentieerd inzicht krijgen in de wereld van arbeid en beroep.

Om docenten een kans te bieden kennis te maken met LOB organiseert het LCV op donderdag 27 april voor maximaal 20 docenten Wiskunde in het VMBO/AVO een studiedag op 3 verschillende plaatsen in Nederland.
Programma: 's ochtends een workshop, 's middags een bedrijvenbezoek.

Datum: **donderdag 27 april 2000**
Kosten: *f* 145,00
Plaatsen: Zwolle, Rozenburg en Kerkrade
Inschrijving:
tel: 0184-669120 (E&MC^2) of
06-2681 8758 (Ben Rubingh)
fax: 0184-669123
e-mail: BRubingh@freeler.nl

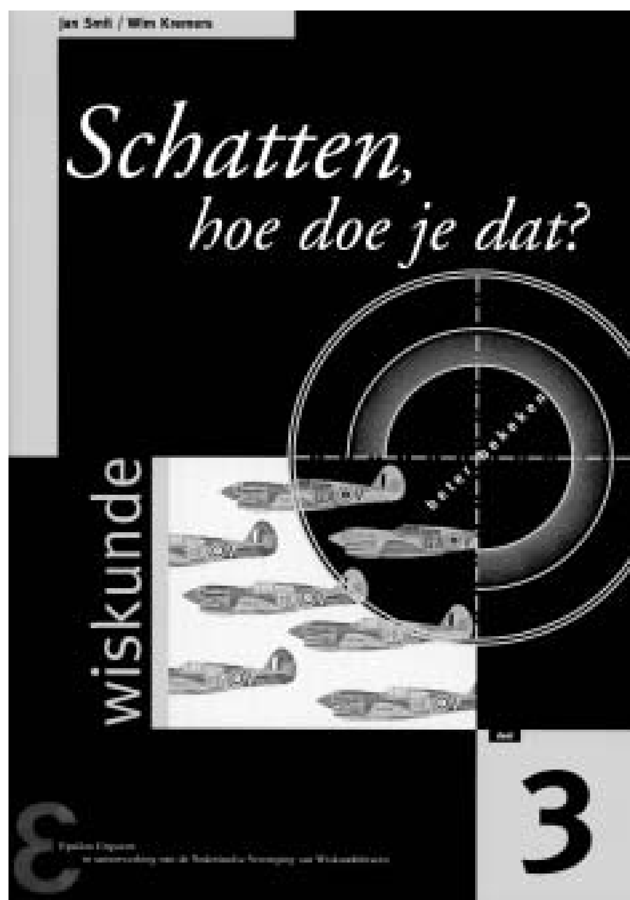
Heeft u zebra nummer 3 al in huis?

Tijdens de Nationale Wiskunde Dagen werd begin februari in Noordwijkerhout het derde zebraatje ten doop gehouden. Dit derde deel was oorspronkelijk bedoeld als het eerste deel, vanwege de bijzondere verbondenheid van Jan Breeman met de auteurs van dit deel, via het gezamenlijk werken aan 'De Wageningse Methode'. Jan maakte daarvoor de computerprogramma's.

De Zebra-reeks is de verwezenlijking van de 'droom van een oude man' zoals Jan zelf ooit zei. De Zebra-ruimte in het wiskundeprogramma van het vwo in de Tweede Fase biedt de mogelijkheid aan leerlingen om kennis te maken met interessante wiskunde en toepassingen buiten het geijkte curriculum.

Helaas is Jan Breeman overleden voor zijn droom werkelijkheid werd. Daarom is de reeks, en in het bijzonder dit boekje, aan hem opgedragen. Ter nagedachtenis aan een bijzonder mens met een grote betrokkenheid bij leerlingen en een hart voor goed wiskundeonderwijs.

Dit derde deel gaat over schatten. De voorkant toont wat bommenwerpers uit de Tweede Wereldoorlog, ter illustratie van het strategisch belang van goede schattingsmethoden om het aantal vijandige vliegtuigen te bepalen. Toepassingen uit vredestijd zijn te vinden in schattingen van het aantal demonstranten (-de politie komt steevast lager uit dan de organisatoren, hoe zou dat komen?-) of het aantal bezoekers van een popconcert. Verschillende schattingsmethoden worden gepresenteerd en de betrouwbaarheid ervan wordt onderzocht.
Verder wordt aandacht besteed aan het fenomeen steekproeven, en waaraan je een 'goede' steekproef herkent.
Het boekje laat zich genieten op een aantal niveau's: allereerst is er het doorlopende verhaal, tussendoor is via opgaven de mogelijkheid om de wiskundige achtergrond wat beter te verwerken. In losse kaders wordt de noodzakelijke voorkennis nog even kort samengevat, terwijl de appendix voor de liefhebber een nadere wiskundige onderbouwing van de theorie geeft. Daardoor stelt het boekje geen hoge eisen aan de voorkennis van de lezer.
Ten slotte biedt de website van de vereniging nog veel meer informatie over het onderwerp, te vinden op het adres: www.nvvw.nl
Dit bijzonder goed leesbare boekje geeft een duidelijk beeld van de valkuilen die in steekproeftrekkingen verborgen zitten, en tips hoe die te vermijden.



Het boekje is geschreven door Wim Kremers en Jan Smit.

Deel 4 zal gaan over de Gulden Snede en Fibonacci.
Nog in voorbereiding zijn deeltjes over onder andere de volgende onderwerpen:
- grafentheorie
- chaos en itereren
- pi
- knopen
- de invloed van stemsystemen op verkiezingsuitslagen
- geschiedenis

Marian Kollenveld,
voorzitter van de redactie

Groepen doen onderzoek bij statistiek

Geïntegreerde Wiskundige Activiteiten (GWA) in mavo-4

Adrie Niënkemper

Inleiding

Op het Fruytier College uit Rijssen doen leerlingen in groepen van vier in het kader van het schoolonderzoek als GWA-onderdeel onderzoek bij statistiek. De GWA is opgenomen in het programma van toetsing en afsluiting voor mavo-4-leerlingen. Door GWA schoolbreed in te voeren, krijgt het een vaste plaats binnen het wiskundeprogramma en kan het van de experimentele fase uitgroeien naar een definitieve plaats binnen het vak wiskunde op onze school.
Per groep kiezen leerlingen een onderwerp uit een beschikbaar gestelde lijst. Na het indienen van het onderzoeksplan en het uitvoeren van het onderzoek, maken ze een scriptie waarbij de onderzoeksresultaten verwerkt moeten zijn met de computer. Ten slotte presenteren de groepen hun onderzoeksresultaten aan de klas, die mee-beoordeelt op product en proces.

Netwerk ALLSO
Adrie Niënkemper werkt op persoonlijke titel mee in het netwerk ALLSO (Actief Lerende Leerlingen door Samenwerken aan Onderzoek), een netwerk van vier scholen met afdelingen (i)vbo/mavo. De afgelopen twee jaar werkten, onder leiding van het APS, van elke school verschillende secties (wiskunde, natuur- en scheikunde, biologie en techniek) aan dit netwerk mee. In het eerste jaar lag het accent op de basisvorming, in het tweede jaar meer op het werken in de andere klassen.
De doelen van het netwerk waren leerlingen te leren meer samen te werken en verantwoordelijkheid te dragen. Dat wilde men bereiken door leerlingen met elkaar op verschillende manieren onderzoek te laten doen. Indien mogelijk werkten leerlingen, docenten en secties daarbij vakoverstijgend samen.

De kracht van het netwerk was dat docenten veel van elkaar leerden, elkaar bemoedigden, inspireerden en het werk onder elkaar verdeelden. Samen werd (les)materiaal ontwikkeld. Hiervan werd en wordt verslag gedaan in een serie artikelen in IMPULS. De resultaten van het netwerk worden vastgelegd in een bronnenboek, dat in februari op de Reehorstconferentie gepresenteerd is.

De scholen die in het netwerk ALLSO samenwerkten met het APS zijn:
- Zuyderzee College Emmeloord,
- Bornego College Heerenveen, locatie Wolvega,
- Stedelijk College Zoetermeer, locatie Van Doornenplantsoen,
- CSG Gaasterland, Balk.

Wat aan deze GWA vooraf gaat

In voorgaande lessen zijn de leerlingen op de hoogte gebracht van de bedoelingen van deze lessenserie. Ze weten dat bij een wiskundig practicum een juiste onderzoekshouding hoort. In voorgaande leerjaren is dat stap voor stap aangeleerd. Het begrijpend leren is al een probleemoplossingsproces. Een leerling die met een wiskundige opdracht bezig gaat, activeert de wiskundige voorkennis om de opdracht naar behoren uit te voeren. De leerling zoekt naar een wiskundig elegante en efficiënte aanpak voor de wiskundige opdracht. Zo wordt het nieuwe probleem er één dat tot de reeds bekende te herleiden is.
Het gaat er dus om dat de leerlingen een practicumopdracht in samenhang zien met het eerder geleerde en in de context waarin het probleem wordt aangeboden. Het herkennen van die relaties is lastig en een vaak vakoverstijgende vaardigheid, maar is wel heel essentieel! In diverse eindtermen van de verschillende vakken is deze vaardigheid opgenomen.

Lijst met onderwerpen

1 Een onderzoek naar de relatie gewicht-lengte van leerlingen van een bepaald leerjaar met daarbij het onderscheid tussen jongens en meisjes.
2 Een onderzoek naar hoeveel tijd elke leerling per week aan zijn huiswerk besteedt. Maak daarbij onderscheid tussen jongens en meisjes en het niveau (VBO, MAVO, HAVO en VWO).
3 Een onderzoek naar de hoeveelheid zakgeld per week per leeftijd binnen de school. Maak daarbij onderscheid tussen jongens en meisjes.
4 Er moet een speeltuin komen. Onderzoek in een bepaalde buurt of straat het aantal kinderen onder de 16 jaar en hun leeftijd, zodat bepaald speelgoed kan worden aangeschaft. Er kan dan een notitie geschreven worden die geschikt is om naar de gemeente te sturen.
5 Een onderzoek, op twee verschillende tijdstippen (spits én een ander tijdstip op de dag), naar de wachttijd bij een bepaald verkeerslicht op een kruispunt (bijvoorbeeld Otje van Potje).
6 Een onderzoek naar hobby's van leerlingen binnen de school. Maak daarbij onderscheid tussen jongens en meisjes.
7 Een onderzoek naar de buitentemperatuur op twee verschillende tijdstippen gedurende 14 dagen.
8 Een onderzoek naar bijvoorbeeld het merk schoenen die leerlingen dragen. Maak daarbij onderscheid tussen jongens en meisjes en de leeftijd.
9 Een onderzoek naar het dragen van autogordels. Maak daarbij een verschil tussen man of vrouw en voor of achter.
10 Een onderzoek naar betaalwijze in een bepaalde supermarkt. (Of het verschil daarvan tussen twee soorten winkels.)
11 Een onderzoek naar de besteding van vrije tijd bij leerlingen op onze school.
12 Een onderzoek naar het aantal klanten dat op een bepaalde dag (of week) een supermarkt bezoekt.
13 Een eigen onderwerp.

Het onderzoek

Bij zo'n praktisch onderzoek doorloopt de leerling de volgende cyclus:

Onderzoeken → analyseren → probleemoplossen → nadenken → verdiepen

Training van een juiste onderzoekshouding, te beginnen in de brugklas, is van groot belang. Kernwoorden bij zo'n onderzoekshouding zijn: problematiseren, structureren, werkdiscipline, creativiteit en het vermogen tot reflecteren. Een praktische opdracht verhoogt het zelfstandig werken en de kunst om samen te werken. Het leidt voor leerlingen tot een herkenbaar eindproduct. Er worden (vakoverstijgende) verbanden ontdekt.
De vaardigheid 'plannen', van onder meer het huiswerk, komt bij deze opdracht uitgebreid aan bod, omdat grote delen van de praktische opdracht buiten schooltijd moeten gebeuren.
We hebben gekozen voor het onderwerp statistiek omdat de leerlingen dit onderwerp in de voorgaande jaren al uitgebreid gehad hebben. Bij statistiek zijn veel onderwerpen te vinden waarbij een onderzoek mogelijk is, en deze staan vaak dicht bij de belevingswereld van de leerlingen.
Er zijn drie soorten van onderzoek te onderscheiden:

- onderzoeken waarmee problemen opgelost worden,
- onderzoeken waarmee verschijnselen beschreven en/of verklaard worden,
- onderzoeken waarmee de variabelen van een verschijnsel geanalyseerd en de relatie tussen de variabelen gezocht worden.

Elk van de onderzoeken kan op verschillende manieren worden uitgevoerd met variatie in openheid. Hierin zit dan een structurele opbouw voor GWA. Er zal verschuiving te zien zijn van gesloten naar meer open onderzoek.

De oriëntatie op het onderzoek

In de eerste les worden door loting groepjes van vier gevormd. In groepen van vier worden leerlingen gedwongen tot samenwerken, een belangrijke vaardigheid binnen de eindtermen. Nadat de groepjes gevormd zijn, krijgen ze een lijst met onderwerpen. Bij de lijst van onderwerpen zitten ook het tijdpad, de normering en de invulbladen voor het handelingsplan (zie de kaders). De leerlingen kregen ongeveer tien minuten om met elkaar te overleggen welk onderzoek ze wilden doen. Ze bleven bij elkaar om te bespreken hoe ze hun onderzoek verder gingen aanpakken. Als voor enquêteren of interviewen is gekozen, moet daarbij een vraagvorm (beknopt en duidelijk) ontworpen worden.

Tijdpad en normering

Tijdpad:

week 42	maken van groepsindeling / keuze-onderwerp / taakverdeling
week 44	inleveren handelingsplan
week 45	teruggeven handelingsplan / opdracht uitvoeren
week 46	werken aan opdracht of verwerken van gegevens / controle voortgang
week 47	idem
week 48	idem
week 49	inleveren opdracht in de vorm van een getypt verslag, waarin duidelijk blijkt waarom voor een bepaald diagram is gekozen.
week 50	presentatie

Normering:

10 pt	onderzoeksvraag
20 pt	onderzoeksplan
30 pt	werkstuk inhoudelijk, werkwijze, tabellen met gegevens / verwerking gegevens
10 pt	motivatie verwerking gegevens
10 pt	conclusie (of 20 pt bij geen presentatie)
10 pt	functionele verzorging
10 pt	presentatie

bijlage: invulblad handelingsplan

Werken aan het handelingsplan

In de volgende lessen stuurt en bewaakt de docent het proces. In de reguliere les hebben de leerlingen een kwartier om in hun groep te werken aan het maken van het handelingsplan. Afhankelijk van het onderwerp moeten ze duidelijk vaststellen wat ze te weten willen komen en welke populatie ze willen onderzoeken. Gaat het om een volledig populatie-onderzoek, een steekproef of een onderzoek naar niet beïnvloede werkelijkheid? Ook een waarnemingsmethode is van belang. Het gaat daarbij om kwantitatieve kenmerken, zoals tellen en meten, of kwalitatieve kenmerken door ondervraging of rangschikking.

Handelingsplan
Nadat je een onderwerp hebt uitgezocht, overleggen jullie binnen je groep hoe je jouw onderzoek gaat aanpakken. Dit plan van aanpak moet resulteren in één of twee door jullie groep geformuleerde onderzoeksvra(a)g(en), een onderzoeksplan, met daarin onder andere de bronnen die er eventueel zijn geraadpleegd. Verder geef je in je onderzoeksplan aan wie wat doet:
- Wie verzamelt de gegevens?
- Wie maakt er een statistisch overzicht, of wie verwerkt de gegevens, de resultaten?
- Wie maakt het verslag (op de computer!!!)?
- Wie maakt de conclusie?
- Wie doet de presentatie?

Nadat de groepen hun plan van aanpak hebben ingevuld, worden deze plannen ingeleverd voor commentaar van mij. Bij het becommentariëren let ik op de soort fouten die zoal gemaakt kunnen worden bij de onderzoeken, bijvoorbeeld:
- mogelijke meetfouten door onnauwkeurigheid of verkeerde aflezing,
- systematische fouten door verkeerde ijking,
- subjectieve elementen zoals verschillende waarnemers of vage formuleringen.

Samenwerken

In de eerstvolgende les van de nieuwe week krijgen de groepen het handelingsplan voorzien van commentaar en hints (zoals: kijk nog eens in het boek bij …) terug.
In het vak voor taakverdeling geven ze aan wie wat doet. Daardoor heeft iedereen binnen de groep een specifieke taak. Ik kan ze op deze taak aanspreken (individuele verantwoordelijkheid). Samen staan ze borg voor hun eindproduct (wederzijdse afhankelijkheid).
Bij het samenwerken is soms bijsturing noodzakelijk, omdat sommige groepsleden ‘meeliften’ op het werk van de andere groepsleden. Niet altijd lost de groep dit probleem zelf op.
In het vervolg van dit artikel dus de rest van dit onderzoek.

De uitvoering

De groepen hebben voor het uitvoeren van het onderzoek twee weken. Het onderzoek wordt grotendeels buiten de gewone wiskundelessen uitgevoerd. Plannen, afspraken maken en nakomen zijn belangrijke vaardigheden die hierbij geoefend worden. Tijdens deze twee weken wordt het laatste kwartier van elke ‘gewone’ wiskundeles gebruikt om in de groepen te werken aan het onderzoek. Het voordeel hiervan is, dat niet alle aandacht naar het onderzoek gaat en dat je als docent toch enig zicht op de vorderingen houdt. Het werken aan de gebruikelijke wiskundige onderwerpen gaat gewoon door, zij het iets minder snel.
Sommige groepen benutten dit kwartier om nog delen van het onderzoek uit te voeren. Andere groepen zijn in het informaticalokaal met de verwerking van de resultaten bezig. Een enkele keer voert een groep het onderzoek in de middagpauze uit.



Gekozen onderwerpen

Voorbeelden van onderwerpen die de leerlingen uit de beschikbare lijst kozen.
- Het dragen van autogordels bij mannen en bij vrouwen, voorin of achterin. Hierbij heb ik de leerlingen na hun telling een krantenartikel juist uit die tijd gegeven, zodat ze ook vergelijkingsmateriaal hadden.
- Huiswerkbelasting in verschillende klassen 1 tot en met 4, uitgesplitst naar niveau. Dat was niet alleen een enquête. Zij moesten ook een decaan of directielid een interview afnemen, waarin gevraagd werd hoe deze tegen de huiswerkbelasting aankijken.
- Betaalmiddel in de supermarkt.

Dit was een observatie met interview van klanten. Ook hier vond ik een krantenartikel over koop- en betaalgedrag uit de betreffende periode. Maar deze groep deed er niets mee. Alleen tijdens hun presentatie hadden ze het blijkbaar bekeken.

- Temperatuurverloop gedurende twee weken op verschillende tijdstippen op een dag. Een meer natuurkundige onderwerp misschien, maar het ging vooral om het verzamelen en verwerken van de gegevens.
- Onderzoek naar het aantal klanten bij een supermarkt op verschillende tijdstippen van de dag. Deze groep had goed kunnen samenwerken met de groep die naar de betalingswijze ging kijken. Maar nee, dat deden zij niet. Zij zochten een buurtsuper uit. Het leuke van dit onderzoek was, dat de eigenaar van deze buurtsuper nu bevestigd werd in zijn voornemen de winkel 's ochtends om kwart over acht open te doen. Dit in verband met de moeders die hun kinderen naar school brengen. (Er staan vijf grote basisscholen in de buurt. Twee pal naast de supermarkt, de andere 200 - 300 m verderop.)
- In de andere klas werd nog gekeken naar huisdieren. Dit onderzoek werd vergeleken met een artikel uit een reclamefolder. Deze leerlingen hadden er echt iets moois van gemaakt. Een van hen was een ICT-expert en dat kon je aan het verslag goed zien.
- In die klas werd ook een onderzoek gedaan naar merkkleding. Dit onderzoek verzandde eigenlijk in de hoeveelheid informatie die zij kregen. Door veel sturing kon er een leuke presentatie gedaan worden.



De verwerking van de onderzoeksresultaten

Omdat computergebruik bij wiskunde een leerdoel is, moeten de resultaten van het onderzoek op de computer verwerkt worden. Daarvoor hadden de leerlingen niet alleen een tekstverwerkingsprogramma tot hun beschikking, maar ook programma's als: Excel, VU-Stat en VU-Graf.
Omdat niet elke leerling thuis over de nodige programmatuur beschikt, heb ik voor de verwerking van de gegevens met deze programma's wel een gehele les gebruikt. Volgend jaar zal ik vooraf informeren welke leerlingen thuis over de benodigde programmatuur beschikken. Daar kan ik dan bij de taakverdeling binnen de groepen rekening mee houden. Dan is er misschien niet een gehele les voor nodig. Van elkaar weten leerlingen snel wat binnen de groep iemands sterke en zwakke punten zijn. Ze houden daar bij het verdelen van de groepstaken terdege rekening mee en dat doe ik dus in het vervolg ook!
Als docent moet je steeds letten op welke statistische technieken de leerlingen bij het verwerken van hun meetresultaten gebruiken. Daarom neem ik de volgende keer daarover een vraag op in het handelingsplan. Die moeten ze verplicht beantwoorden en dus moeten ze over hun keuze nadenken. Soms worden de meetresultaten niet goed geïnterpreteerd, waardoor de conclusie geen absolute zekerheid biedt. Ook de betrouwbaarheid van de onderzoeken kan te wensen over laten. Als docent moet je erop wijzen als er te weinig metingen zijn gedaan om betrouwbare conclusies te trekken.

Het verslag

Nadat er gemeten is en de resultaten gerangschikt en verwerkt zijn, maken de leerlingen per groep een verslag. Iemand binnen de groep heeft hier de verantwoordelijkheid voor. Het verslag bestaat uit een

aantal voor de leerlingen bekende onderdelen: titel, doel, methode, resultaten, vragen en conclusies. Deze onderdelen zijn schoolbreed dezelfde, zodat hierover voor de leerlingen geen onduidelijkheden bestaan.
Voor ze hun onderzoek mondeling aan de klas presenteren, beoordeel ik de verslagen. Ze krijgen nog niet te horen welk cijfer ze hebben, om geen extra druk op het presenteren te zetten. Wel krijgen ze het verslag terug, zodat ze het kunnen gebruiken bij de voorbereiding op de mondelinge presentatie.

Beoordeling presentatie groepen **Groep:**

Presentatie van groep ....

Geef als groep punten over de volgende onderdelen
(je mag ook een gemiddeld cijfer per onderdeel geven).

We letten op:

	score
1 duur van de presentatie	
minimaal 5 minuten, maximaal 7 minuten	......
2 inhoudelijk	
wordt het verhaal ingeleid	......
sluit het verhaal bij de doelstelling aan	......
is er een afsluiting (eindconclusie)	......
3 taalgebruik	
goede zinsbouw	......
niet te veel moeilijke woorden	......
begrijpelijk voor de luisteraars	......
4 de presentatie zelf	
naar de luisteraars gericht	......
geen gehakkel	......
geen grote pauzes	......
5 beantwoording vragen klas	......
6 voegen iets extra's toe	......
Totaal	......
Gemiddeld	......

Motivatie beoordeling: ....

De presentaties en de beoordeling

Bij het vak Nederlands is het presenteren geoefend. Het gaat erom door middel van verbale en non-verbale middelen een goed verhaal naar het publiek over te brengen. Zo maken de leerlingen vaak gebruik van de overheadprojector. De groepen beoordelen elkaar met behulp van een beoordelingsformulier (zie hierbij in het kader). Ook een docent Nederlands beoordeelt tegelijk de presentaties aan de hand van dezelfde criteria. De docent Nederlands en ik bepalen samen ons cijfer van het presenteren. Later middelen we dit met de beoordelingen van de leerlingen. In de toekomst gaat het cijfer voor presenteren bij wiskunde ook meetellen bij Nederlands.
De verantwoording van het onderzoek wordt bij het verslag beoordeeld, evenals de inhoud en de verzorging. Daarnaast heb ik de groepen ook beoordeeld op werkhouding en inzet tijdens die momenten dat de groepen in de klas met het onderzoek bezig waren. Hoe het eindcijfer tot stand kwam, staat in het begin van dit artikel.

Reacties van leerlingen

Het samen werken aan een werkstuk werd door de meeste leerlingen als leuk ervaren. Ze hebben samen soms echt plezier beleefd aan het maken van de werkstukken. In bepaalde groepen werd het wel als moeilijk ervaren. Eerst vonden ze het 'gek' dat je bij wiskunde een werkstuk moet maken. Ze zijn dat niet gewend. Het presenteren vonden de meeste leerlingen lastig. Waren ze eenmaal bezig met de presentatie, dan ging het goed. Het verwerken van de gegevens vonden de meesten echt prachtig. Het hoofdstuk Statistiek ging voor sommigen 'leven'.
De meeste leerlingen vonden het wel veel werk. De waardering is maar 1/40 van het totale eindcijfer (inclusief het examencijfer). Dit vonden ze wel wat weinig. Graag volgende jaren meer waardering hiervoor. Leerlingen gaven realistische cijfers voor de presentaties van andere groepen. Zij gingen er serieus mee om.

Wat heb IK van dit onderzoek geleerd?

Allereerst dat GWA-activiteiten vanaf de brugklas een vaste plaats binnen de wiskundelessen moeten krijgen, zodat de leerlingen leren hiermee goed om te gaan. Daarnaast dat ik meer structuur moet aanbrengen bij de controle op de voortgang tijdens het onderzoek. Nu komt het voor dat groepen op het laatste moment nog sheets moeten maken, of erger, het materiaal dat ze bij het presenteren nodig hebben, vergeten mee te nemen. Ik denk aan een logboek waarin de leerlingen de vorderingen per groep nauwkeurig kunnen bijhouden, zodat ik zo nodig op tijd kan corrigeren.
Verschillende groepen hebben hun onderzoek in school gedaan. Niet iedere docent reageerde hier enthousiast op. Vroegtijdige informatie naar de betreffende docenten voorkomt ergernis.
Leerlingen hebben vaak grote moeite met het zoeken naar goede bronnen of vergelijkingsmateriaal bij hun onderzoek. Ook bij andere vakken zijn deze vaardigheden belangrijk. Wij zullen daar binnen de school bij verschillende vakken meer aandacht aan moeten schenken.

Ten slotte

Door het werken aan zulke praktische opdrachten, zoals hier bij GWA, worden de leerlingen vaardiger. Ze leren verbanden zien en kennis wordt geïntegreerd en toegepast in nieuwe situaties. Hun zelfstandigheid neemt toe en ze leren samen een klus te klaren. Deze vaardigheden zijn van groot belang voor een vervolgstudie op het mbo, maar ook in hun verdere (beroeps)leven.
Onderzoekend leren moet vanaf de onderbouw van het voortgezet onderwijs stap voor stap getraind worden om een goede basis voor later te bewerkstelligen. De opbouw kan gaan van meer gesloten onderzoeken naar meer open onderzoek met een grotere mate van zelfstandigheid voor de leerlingen. En laten we bedenken wat C. Verheul schreef: *'Van alles wat je probeert, kun je leren, soms hoe je het niet moet doen! Er moet een sfeer ontstaan waarin experimenteren heel normaal is: want niks proberen is niks riskeren en dat is pas ECHT riskant!'*

Noten

Adrie Niënkemper was docent aan het Fruytier College te Rijssen. Hij is vanaf 1 januari 1999 docent aan het Van Lodenstein College te Amersfoort.

Dit artikel is eerder verschenen in **Impuls**, het blad van APS-Natuurwetenschappen en Techniek.

Rectificatie

In de instructie bij de werkbladen van nummer 6, op blz. 167, zitten wat onvolkomenheden.
1 De kalender is niet bewerkt, maar bedacht en uitgewerkt door Sjoerd Schaafsma.
2 De twee 'halve' kalenderdelen van blz. 168 en 169 moeten gekopieerd, uitgeknipt en tegen elkaar elkaar geplakt worden met de blanco achterkanten; dan verder instructies volgen.
Excuses voor deze foutjes.

De redactie

Praktische opdrachten met computergebruik op de SLO-site

Het project 'ICT en wiskunde' heeft vijf praktische opdrachten opgeleverd waarin gebruik wordt gemaakt van Excel.
Deze opdrachten zijn voor gebruik binnen school vrij te downloaden van de SLO-site
http://www.slo.nl/~ICTenWIS.
De reeds bestaande computerpractica (Excel) voor gebruik naast de methode Getal en Ruimte zijn nu ook te downloaden als Zip-bestand.
Alle hier gepubliceerde opdrachten zijn ontworpen vanuit het idee dat ook de docent die nauwelijks of geen ervaring heeft met computergebruik de leerlingen hiermee kan laten werken.
Binnenkort hoopt het project de web-pagina uit te breiden met computerpractica (Excel) voor gebruik naast de methode Netwerk. Ook zijn nog enkele praktische opdrachten in productie.
Het project is gestart naar aanleiding van een aanvraag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. In het project worden lesmaterialen gemaakt waarin computergebruik een centrale plaats heeft, met een zo laag mogelijke drempel voor docenten met weinig of geen ICT-ervaring.

INTERVIEW

Vernieuwing in het MBO

'De omgang met leerlingen is het meest interessant'

Adriaan Nieuwenhuizen, 47 jaar, werkt op het Europa College, sector techniek, onderdeel van ROC ASA (vestigingen in Utrecht, Amersfoort en Amsterdam). Los van alle fusies, dus ook naamsveranderingen, is dit de school waar hij augustus 1977 begonnen is als docent wiskunde. Naast de wiskunde is allereerst het vak 'practicum wiskunde' erbij gekomen wat later overging in 'practicum informatica'. Sinds schooljaar 1993-1994 geeft hij naast wiskunde ook programmeren in PASCAL op de afdeling technische informatica. Adriaan werkt zowel overdag (voltijd) als 's avonds (deeltijd) in de sector techniek.
Dit schooljaar heeft hij eerste en tweede klassen voltijd aan de afdelingen electrotechniek en technische informatica. Verder de 'examengroep' voltijd waarin leerlingen uit alle afdelingen. In de deeltijdopleiding geeft Adriaan les aan leerlingen electrotechniek en werktuigbouwkunde.

Wat vind je leuk en interessant in het werken aan wiskunde op je school?
Het meest interessante aan werken op school is de omgang met leerlingen. Contact hebben met deze groep is nog steeds de drijfveer van mijn werk. Het is daarbij niet echt belangrijk of dit contact nu via de wiskunde, mentoraat of informatica ontstaat. Ik zou er voorlopig nog niet aan moeten denken zonder contact met leerlingen te moeten werken. Natuurlijk zijn er wel eens dagen dat ook ik dat wel als ideaal zie, maar over het algemeen motiveert het 'bezig zijn met leerlingen' mij nog voldoende.
Het interessante aan de wiskunde op onze school is voor mij toch wel de verandering die het vak doormaakt. Was het jaren geleden toch slechts het na-apen van de docent, tegenwoordig worden er heel andere vaardigheden van de leerling verwacht. De rol van de docent is hierdoor natuurlijk ook drastisch veranderd. Stond je vroeger elke drie kwartier leerstof te behandelen en opgaven voor te doen, tegenwoordig ben je vooral bezig leerlingen te begeleiden en te proberen ze zelf te laten nadenken over de (wiskunde)problemen. Vooral het niet onmiddellijk geven van het juiste antwoord is een '180 graden omslag'. Het contact met de leerling is intensiever en dus, als de leerling ook op de juiste manier werkt, productiever. De moeilijkheden bij het oplossen van (wiskunde)problemen komen op deze manier sneller boven water. De docent zal de leerling de weg moeten wijzen hoe verder te gaan, maar de leerling zal dat dan ook nog moeten gaan doen. Je ziet helaas als docent ook heel snel dat er niet gewerkt wordt, terwijl je vroeger door de 'grotere afstand' daar minder kijk op had.

Je werkt, heb ik begrepen, in het nieuwe programma met het experimentele TWIN-materiaal. Ben je hierdoor veranderd in je kijk op de plaats van wiskunde in het MTO?
Door de veranderde eindtermen van de wiskunde in het MTO hebben we ook andere wiskundemethoden gekregen. Daar je als school de eindtermen moet halen, kun je bijna niet vasthouden aan 'oude ideeën' en/of 'oude methoden'.
Gezien de vele problemen die de leerlingen hebben met de (basis)wiskunde, denk hierbij alleen maar eens aan de rekenvaardigheden, zou een 'oud' idee misschien nog steeds goed werken:
- *bied de wiskunde(basis)vaardigheden zonder context en met veel wiskundevoorbeelden aan.*
- *laat de leerlingen vervolgens de wiskunde(basis)vaardigheden zonder context vele malen oefenen (rijtjes sommen).*
- *bied aan het eind van het hoofdstuk enige wiskundige opgaven in een (technische) context aan.*
- *verplicht de techniek slechts de oplossing van het technische probleem tot aan de wiskunde uit te voeren en verwijs de leerling daarna naar de wiskunde.*

Bij bovenstaande manier van werken is heel erg duidelijk waar de vaardigheden aangeleerd worden. De leerling kan dan ook, als hij later iets niet meer precies weet van de wiskunde, terugkijken. Nadat de wiskundige (basis)vaardigheden aangebracht zijn komen de toepassingen. Het uit elkaar trekken van

het aanleren van de wiskundige vaardigheden en het toepassen daarvan zou voor veel leerlingen wel eens prettiger kunnen zijn.
Het aantal uren dat beschikbaar is voor de huidige wiskundemethode is voor vele leerlingen momenteel te weinig. Vroeger hadden we vier uur wiskunde en werden alleen de wiskundige vaardigheden goed en duidelijk 'aangebracht'. Tegenwoordig moeten, naast puur wiskundige vaardigheden, ook nog andere vaardigheden getraind worden, maar dit alles wel in de helft van de tijd van vroeger. De factor tijd speelt dus ook een grote rol in het huidige MTO.

Wat zijn je ervaringen met het werken met de grafische rekenmachine in het nieuwe programma?
Wij hebben voor de TI-83 dan ook een kleine inleiding in het gebruik van de machine gemaakt. Naast het maken van deze inleiding hebben wij geprobeerd om wiskundige toepassingen binnen de techniek te zoeken die op te lossen zijn met behulp van de grafische rekenmachine. Dit zou tevens een brug kunnen slaan tussen het vak wiskunde en de technische vakken. Het tweede doel was om de, bij de leerling niet aanwezige, wiskundige (reken)vaardigheden te ondersteunen. De inleiding wordt gratis aan de leerlingen verstrekt die een TI-83 via school kopen. Het valt op dat de leerlingen hun grafische rekenmachine sneller vol hebben zitten met spelletjes die ze van internet afhalen, dan dat ze de belangrijke zaken uit de inleiding voor hun studie bestuderen. Het kost enige tijd en overredingskracht voordat de leerlingen de inleiding bestuderen. Ook hier moet je als leraar dus wederom niet meteen vertellen hoe het zit, maar ze verwijzen naar de speciaal voor hen geschreven korte overzichtelijke inleiding. In mijn ogen maken ze er nog te weinig gebruik van, als je het spelen van spelletjes tenminste niet meerekent. Op het Europa College mogen de leerlingen de grafische rekenma-

40 jaar geleden

1185
Van een reeks wordt de *k*e term voorgesteld door t_k en de som van de eerste *k* termen door s_k; $s_1 = t_1$.

Gegeven is dat
$s_k = -{}^{10}\log(k+1)$
voor $k = 1, 2, 3$, enz.

a Bewijs dat alle termen van de reeks negatief zijn.
b Voor welke waarden van *k* is $t_k > -0{,}1$?
c Bereken $\lim_{k \to \infty} t_k$.
d Is de reeks convergent (d.w.z. heeft s_k een limiet, als $k \to \infty$)?

(Gymnasium 1959)

1186
Bepaal de gehele, positieve getallen *a*, *b* en *c* zo, dat

$a + 2b + 4c = 53$,

en waarbij

$s_k = a \cdot 3^{2k+1} - b$ (*k* geheel en ≥ 1)

de somreeks van een meetkundige reeks is, waarbij $s_1 = t_1$ is.
Bereken van de mogelijke reeks(en) de eerste term en de reden.

1187
Uit een punt van de schuine zijde van een rechthoekige driehoek ziet men de aan de rechthoekszijden aangeschreven cirkels onder gelijke hoeken. Bepaal dat punt, alsmede de kleinste waarde, die deze gelijke hoeken kunnen aannemen.

H. Verdonk

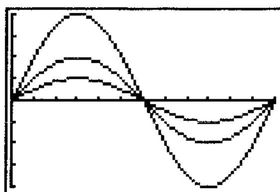
1188
In de rechthoekige ΔABC ($\angle C = 90^\circ$) trekt men $CL \perp AB$ en op de zijde BC beschrijft men buitenwaarts het vierkant CBGF. Als AG de rechte CL in S snijdt, bewijs dan:

$$\frac{1}{CS} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{CL}$$

Vraagstukken uit Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 47 (1959-1960)

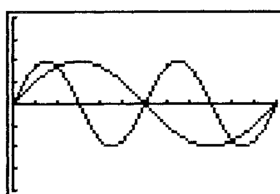
chine gebruiken bij alle vakken en alle proefwerken, behalve als in het Onderwijs Examen Reglement (afgekort OER) staat dat het bij een bepaald vak of proefwerk niet mag. Dit hebben we speciaal zo geregeld omdat het toch nog een prijzige machine is en die uitgave niet gerechtvaardigd zou zijn indien het apparaat slechts bij een paar uurtjes wiskunde gebruikt zou mogen worden. Als de leerlingen kleine programmaatjes hebben gemaakt voor 'n bepaald proefwerk, zie je wel dat ze ze onderling uitwisselen.
Het allergrootste voordeel van de grafische rekenmachine is in eerste instantie dat wat de leerlingen intypen zichtbaar blijft in het display. Ze zien dus sneller of ze iets verkeerd invoeren. Hebben ze iets verkeerds ingevoerd, dan kunnen ze de foutieve invoer nogmaals opvragen en verbeteren. Daarnaast is het mogelijk "onderzoek" te plegen en/of "simulaties" te draaien. Dit onderdeel wordt de leerlingen vaak pas later duidelijk. Voor een aantal onderwerpen uit de techniek, onder andere de wisselstroomtheorie, is het daarom een extra ondersteuning en kunnen de leerlingen zich de theorie sneller eigen maken. Bij de wiskunde kan dit alles natuurlijk ook. Los van het feit dat het zowel in het nieuwe als in het oude wiskunde programma zit, kun je met de grafische rekenmachine natuurlijk snel achter de betekenis van de factoren a en b uit de uitdrukking: $y = a.x + b$ komen. Het "mooiste" voorbeeld is natuurlijk echter het voorbeeld:
$y = a \, . \, \sin(b \, . \, x - c) + d$, waarbij leerlingen binnen een paar minuten de betekenis van de factoren a, b, c en d leren, terwijl daarbij vroeger een docent "uren" stond te tekenen en erover stond te praten.
Het onderzoeken van de invloed van de constante a op de standaardsinus kan door het invoeren van een of meerdere sinusvormen met een waarde van a ongelijk aan 1 gemakkelijk worden uitgevoerd:

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=sin(X)
\Y2=2sin(X)
\Y3=.5sin(X)
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

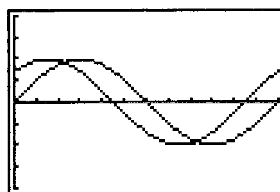


De effecten van wijzigingen van de constanten b, c en d op de standaardsinus kunnen ook met de grafische rekenmachine gemakkelijk worden nagegaan:

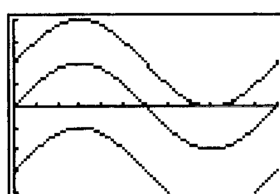
```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=sin(X)
\Y2=sin(2X)
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```



```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=sin(X)
\Y2=sin(X-30)
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```



```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=sin(X)
\Y2=sin(X)+1
\Y3=sin(X)-1.5
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```



Natuurlijk moet er nu nog onderzocht worden wat er gebeurt als we $y = \sin\,(2x - 6)$ invoeren, maar de ervaring leert dat de geleerde effecten van de verandering van constanten op de standaardsinus de leerling ook dit probleem snel doen oplossen. Dit alles gaat veel sneller dan zonder de grafische rekenmachine.

Kun je iets zeggen over hoe de leerlingen het werken in het nieuwe programma ervaren? (moeilijkheidsgraad, werkvormen, toetsen, enz.)
De huidige leerlingen moeten nog heel erg wennen aan de nieuwe manier van werken, namelijk het zelfstandig werken. Ze zien toch nog het liefst de docent die het hele lesuur klassikaal iets uitlegt. Ze zien nog niet in dat ze naast het leren van wiskunde ook andere vaardigheden oefenen, zoals onder andere: samenwerken – luisteren – discussiëren. Het is ook erg moeilijk om bij de les te blijven en niet in de verleiding te komen om het hele lesuur over andere zaken dan wiskunde te praten. De aangereikte planning, of de door hen zelf gemaakte planning, wordt zelden gevolgd. Het op het laatste moment werken is nog steeds een veel voorkomende manier van werken. Daar het op de vorige school werkte denken ze dat het nu ook wel weer zal lukken. Dit is echter niet het geval daar de methode TWIN "geen" uitleg, voorbeelden of samenvattingen geeft. Als de leerling dus zijn werk niet goed verdeeld heeft en dus niet gedurende de gehele periode gewerkt heeft zal de leerling slecht voorbereid op de toets verschijnen. "De avond van tevoren leren" werkt bij TWIN zeker niet. Helaas zijn veel leerlingen niet te bewegen om een samenvatting of uittreksel van het te leren hoofdstuk te maken. Bij die leerlingen ontbreekt dan ook het overzicht.

Wat vind jij als leraar moeilijk in het werken met het nieuwe programma?

De rol van de leraar is natuurlijk wel veranderd (zie ook boven), maar de moeilijkheden van het nieuwe programma zitten denk ik vooral aan de kant van de leerling.
Het nieuwe wiskundeprogramma is op zich niet moeilijker dan het vroegere wiskundeprogramma. Ik denk dat de andere, niet-wiskundige eisen, die aan de leerlingen gesteld worden een grotere rol spelen. De leerling van vroeger hoefde zich bij de wiskunde niet druk te maken over:

- a *zelfstandig de leerstof doorspitten*
- b *samenwerken met anderen*
- c *naast het eigen maken van wiskundige vaardigheden deze ook kunnen toepassen*
- d *taalvaardigheid om de methode te kunnen begrijpen/volgen.*

Dit alles betekent meer "druk" op de leerling en dus meer reactie naar de leraar. Een leerling ziet liever dat een docent even snel het goede antwoord geeft, dan dat hij samen met de leerling het probleem gaat bespreken en oplossen. Dit heeft tot gevolg dat er wel eens extra spanning ontstaat tussen leraar en leerling, omdat de docent nu juist niet meteen het goede antwoord of de juiste uitleg moet geven. Een van de vele leerdoelen is nu eenmaal dat de leerling het zelf moet uitzoeken, maar wel onder begeleiding van de docent. Soms heeft de leerling daar eenvoudigweg het geduld niet voor. Indien dit vaak voorkomt is dit knap lastig en zou je als docent de neiging kunnen krijgen maar weer te gaan doceren om van die extra spanning tussen leraar en leerling af te zijn.

Wat verwacht je op het punt van kennis en (reken- en algebraïsche) vaardigheden van de leerlingen die uit de mavo bij jullie binnenkomen? Dit vooral ook in relatie met het gebruik van de grafische rekenmachine.
De rekenvaardigheid van leerlingen in het algemeen is de afgelopen jaren verslechterd. Er is ook minder algebraïsche kennis aanwezig. Toch zullen we met deze beperkingen moeten leren leven omdat er helaas geen (extra) tijd is om alle hiaten weg te werken. De grafische rekenmachine is dan een extra hulpmiddel om er toch voor te zorgen dat een leerling een technische studie met succes kan afronden.
Op dit moment is er nog nauwelijks kennis van het gebruik van de grafische rekenmachine bij de leerlingen die op het MTO komen. Ik denk dat we in de toekomst leerlingen krijgen die de grafische rekenmachine in ieder geval kennen en er mee kunnen rekenen. Wij zullen denk ik wel de kennis aan moeten brengen van de grafische rekenmachine die zeer goed te gebruiken is op het MTO. Zoals het bovenstaande voorbeeld laat zien zal dat zeker het grafische gedeelte zijn, maar ook de SOLVER zal daar zeker onder vallen. Leerlingen zijn namelijk nog wel in staat om met behulp van een ezelsbruggetje, namelijk het tekenen van een driehoek, de formule : $I = U/R$ om te werken, maar zijn niet meer in staat om onder andere de volgende formule voor uitzetting om te werken:
$L_w = L_k \{ 1 + c (t_w - t_k) \}$
De SOLVER biedt dan in ieder geval de mogelijkheid om de formule uit te rekenen zonder hem zelf om te werken. Techniek zonder rekenen "bestaat niet" en dus zal de grafische rekenmachine, of we het willen of niet, steeds belangrijker worden voor die leerlingen die onvoldoende reken- en/of algebraïsche vaardigheden hebben. Als die leerling wel de wil heeft om een technische studie te gaan volgen, moet de kennis van de grafische rekenmachine hem/haar in staat stellen de technische studie met succes af te ronden.

In het nieuwe programma moet de wiskunde vooral nuttig en bruikbaar zijn voor de technische vakken. Lukt dat? Zijn er reacties uit die hoek?
De technische collega's beginnen er nu eigenlijk pas achter te komen dat de leerlingen anders zijn opgeleid dan zij zelf in het verleden. Ook de verminderde reken- en algebraïsche vaardigheden beginnen nu pas echt in beeld te komen. Toch lijkt het erop dat er nog onvoldoende op wordt ingespeeld. Zelfs de nieuwste technische boeken gaan er nog steeds vanuit dat de leerling goed kan rekenen en algebraïsch *vaardig is. Deze boeken maken dan ook nog geen gebruik van de grafische rekenmachine, maar gaan er gewoonweg van uit dat de leerling over de "ouderwetse wiskundige reken- en algebraïsche vaardigheden" beschikt. Vooral in de tweede klas van het MTO grijpen de leerlingen snel naar hun grafische rekenmachine om die "moeilijke" wiskundige problemen op te lossen. De technische docenten zouden echter nog steeds de "oude wiskundige oplossingen" willen zien. Helaas is er nog steeds te weinig overleg tussen de verschillende vakgebieden en dus is niet bij elke technische collega bekend hoe wiskunde in ons MTO veranderd is. Het werken in groepen en zelfstandig werken is ingevoerd bij de wiskunde, maar er staan nog steeds (veel) technische collega's "urenlang" te doceren. Ook de kreet: "ze kunnen niet rekenen en wat doen jullie daaraan?" is nog steeds te horen in MTO-land.*

Wat verwacht je, tenslotte, van de leerlingen die bij jullie instromen op het vlak van houding en studievaardigheden voor het vak wiskunde?
Ik verwacht, vooral in de toekomst, dat de leerlingen kunnen plannen en zelfstandig werken, omdat ik denk dat ze dat in het traject voor het MTO geleerd en toegepast hebben. Op dit moment mis ik dit erg, naast de wil om iets te doen.

Wim Laaper

Opgave 699

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A
2563 EB Den Haag

Op 4 en 5 februari 2000 vonden de zesde Nationale Wiskunde Dagen plaats. Nieuw in het programma was de WISRUN, die 's zaterdags van 9 tot 11.30 uur plaatsvond. Hierbij moesten groepjes van 4 personen puzzels oplossen en de antwoorden daarvan ludiek aan de jury rappen, zingen, toneelspelen, enz. Na afloop ontvingen de deelnemers een boekje met alle 52 wisrun-opdrachten.

Een paar voorbeelden:
'Hoe kun je met een oneerlijke dobbelsteen eerlijk tossen? Het groepslid met de meeste jaren onderwijservaring mag de toelichting aan de jurytafel geven.'

Leuk is ook:
'Het antwoord is 5. Wat was de vraag? Hier zijn uitsluitend originaliteitspunten te verdienen!'

Formuletaal moet lukken:
'O-A X-S B-U → O, Mina, ik bemin u.
Verzin zo uw eigen wiskundeboodschap en laat de jury hem oplossen.
U mag ook getallen gebruiken.'

De laatste twee voorbeelden brachten me op het idee of alle getallen te 'benoemen' zijn.

- Het Franse S heeft 37 P. *(Het Franse Solitaire heeft 37 Pionnen)*
- De 150 L van de T K. *(De 150 Leden van de Tweede Kamer)*
- Een S heeft 8 P. *(Een Spin heeft 8 Poten)*
- A B en de 40 R. *(Ali Baba en de 40 Rovers)*
- 52 K in een S of 52 W in een J. *(52 Kaarten in een Spel of 52 Weken in een Jaar)*
- Een R H is 90 G. *(Een Rechte Hoek is 90 Graden)*

Probeer nu de volgende vijf getallen te benoemen. Als u de oplossing binnen een maand instuurt ontvangt u maximaal 5 punten voor de doorlopende ladderwedstrijd.

- De 13 V van de Nederlandse T.
- De F 10 met B D en D M.
- De 13659 P onder het P op de D.
- De 45 B van de Nederlandse L.
- De 57 V van H.

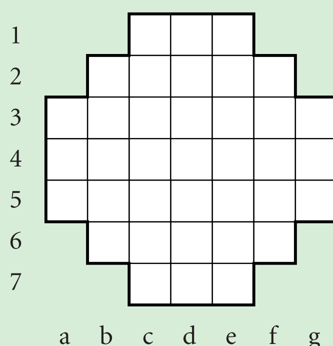
En tot slot (buiten mededinging):
EEN 10 MET EEN G VOOR DE NVVW, DIE AL 75 J BESTAAT!

Recreatie

Oplossing 696

Recreatie

Frans Cremers, een gepensioneerde onderwijzer uit Aalter (Belgie) bestudeerde al een tijdje oude gravures van het Franse solitaire spel met 37 pionnen. Het viel hem op dat het altijd een vol bord was. Hij ging uit van de stelling dat het Franse solitaire ooit oplosbaar moet zijn geweest. In het boek *'T is me een raadsel* haalt hij de middelste pion weg (W) en zet hem gedurende het spel weer terug (T). Na 27 zetten eindigt de laatste pion in het midden!
De Amerikaan *Leonard Gordon* uit Tucson, Az heeft dit spel intussen opgelost in 23 zetten:
d4W, d2-d4, f2-d2, e4-e2, g3-e3, d1-d3-f3, e1-e3, b2-d2, c4-c2, c1-c3, g4-e4-e2-c2-c4, a3-c3, d5-d3-b3, d4T, a5-a3-c3, b5-b3-d3-d5-b5, f6-f4, d7-d5-f5, g5-e5, c7-c5, c4-c6, f3-f5-d5, e7-e5-c5, c6-c4, b6-b4-d4.



Len lost onze recreatie-puzzel op in 24 zetten:
d1W, d3-d1, f3-d3, e1-e3, e4-e2, c1-e1-e3, d1T, d3-f3, g3-e3, e6-e4-e2, g5-e5, g4-e4-e6, e7-e5, c4-e4-e6, c7-e7-e5, c6-e6, f6-d6-d4, c2-c4-c6, b6-d6, a5-c5, a3-c3, a4-c4-e4-e6-c6-c4-c2, b2-d2, d1-d3, f2-d2, d3-d1.
We kunnen ook in het midden eindigen als we als laatste zet d2-d4 hadden gedaan!

De enige(!) inzending van een ladderpuzzelaar was van *Wilma den Boer* (35 punten), Gouda, die een oplossing vond voor d5→d4. Onze complimenten!

Len Gordon heeft nu een nieuwe variant: d4 is leeg, zet in f3 een dubbele pion, eindig in f3. Dit lukt hem in 24 zetten:
d2-d4, f3-d3, f3T, g3-e3, d3-f3, g5-g3-e3, b3-d3, c1-c3, d3-b3, f2-d2, e4-e2-c2, a3-c3, b5-b3, b2-b4, d5-d3-b3-b5-d5, e1-c1-c3-c5, d5-b5, b6-b4, c7-c5, f5-d5-b5, a5-c5, e7-e5, a4-c4-c6-e6, f6-d6, d7-d5-f5-f3.

In het maartnummer van Natuur & Techniek wordt het driehoekig solitaire bestudeerd.

Met 60 punten is winnaar van een boekenbon van ƒ 50,–:

Tamme Afman
W.D. van Dommelenstraat 14
8181 MA Heerde

Heel hartelijk gefeliciteerd!

KALENDER

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in het lopende schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Doorgeven kan ook via e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

nr.	versch.	deadline
7	15-05-00	30-03-00
8	26-06-00	11-05-00

Conferentie Sporen 2000
Rekenen/wiskunde voor BVE
do. 13 en vr. 14 april 2000
CINOP: 073 6800744
www.fi.uu.nl/sporen

Symposium Wiskunde in Bedrijven
vr. 14 april 2000
Noordelijke Hogeschool Leeuwarden
tel. 058 2961740
www.tem.nhl.nl/tem/exact/bwisymp
Zie ook Euclides 75-5, p. 161

Vakdocentendagen LOB
Loopbaanoriëntatie voor vmbo
do 27 april 2000
Zwolle, Rozenburg, Kerkrade
Meer info op:
www.e4-mc2.nl/LCV
of www.ldc.nl

Examendata 2000
vbo/mavo C/D vr.26/5/00
havo A/A12 do. 25/5/00
havo B/B1/B12 di. 23/5/00
vwo A wo. 17/5/00
vwo B/profi do. 25/5/00

Examenbesprekingen 2000
vbo/mavo C/D di. 30/5/00
van 15.00 - 18.00 uur
havo A ma. 29/5/00
van 16.00 - 18.00 uur
havo B do. 25/5/00
van 18.30 - 20.30 uur
vwo A vr. 19/5/00
van 16.00 - 18.00 uur
vwo B ma. 29/5/00
van 18.30 - 20.30 uur
Zie ook p. 200

Examenbespreking Tweede Fase
havo B1 en B12 wo. 24/5/00
van 19.00 - 21.00 uur
havo A12 vr. 26/5/00
van 19.00-21.00 uur
Locatie: Jaarbeurs, Utrecht

HKRWO-symposium
za. 27 mei 2000, Utrecht
100 jaar wiskunde-onderwijs
Naar aanleiding van het gelijknamige boek dat verschijnt bij het 75-jarig bestaan van de NVvW.
Zie aankondiging Euclides 75-5, p.161.
Ed de Moor: 020 6121382/030 2611611

Wiskunde en praktische opdrachten met Coach
do. 8 juni 2000,
10.00 - 15.30
Amstel Instituut, A'dam
tel: 020 - 5255886
www.wins.uva.nl/research/amstel/vo

9th International Congress on Mathematical Education (ICME)
31 juli - 6 augustus 2000
Tokyo, Japan
www.ma.kagu.sut.ac.jp/~icme9/

T^3-symposium in Oostende
Teachers teaching with technology
di. 22 - do. 24 augustus 2000

De Nationale Doorsnee
di. 10 oktober 2000
Voor alle scholen in Nederland
Zie dit nummer p. 197

NVvW-Lustrumcongres
vr. 17 en za. 18 nov. 2000
Het 75-jarig bestaan van de Vereniging.
Zie ook: www.nvvw.nl

Internetsites voor wiskundedocenten:

NVvW website
De website van de NvvW staat nog steeds boordevol actuele informatie:
http://www.nvvw.nl
Onder andere met alle examenbesprekingen

Voor TI-gebruikers
www.cmta.delmar.com

Symposium Wiskunde in Bedrijven
www.tem.nhl.nl/tem/exact/bwisymp

Vakdocentendagen LOB
Loopbaanoriëntatie voor vmbo
www.e-mc2.nl/LCV
www.ldc.nl

Praktische opdrachten met Coach
www.wins.uva.nl/research/amstel/vo

Praktische opdrachten met Excel
www.slo.nl/~ICTenWIS

Suggesties voor interessante sites of interessante freeware voor wiskundedocenten graag zenden aan e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Toegestaan op Tweede Fase eindexamens havo-vwo

Wisforta

Wiskunde, Formules en Tabellen

Eindelijk duidelijkheid! Alles wat een leerling mag raadplegen op zijn Tweede Fase wiskunde-examen in een overzichtelijk boekje.



Het is een boekje van 40 pagina's geworden en zal vanaf maart 2000 verkrijgbaar zijn.
De inhoud:

- *formulekaart havo*
- *formulekaart vwo*
- *cumulatieve binomiale verdeling*
- *cumulatieve normale verdeling*
- *toevalsgetallen.*

Het boekje is goedgekeurd door de CEVO en mag bij de centrale examens wiskunde in de Tweede Fase worden gebruikt.
(Bron: www.eindexamen.nl en de novemberbrief 1999)

ISBN 90 01 65956 X ƒ 15,00 € 6,81

Het boek is alleen voor rekening leverbaar. Stuur de bon in een gefrankeerde envelop naar Wolters-Noordhoff, t.a.v. afd. voorlichting Exact, Postbus 58, 9700 MB Groningen. E-mailen kan ook: voorlichting.vo.exact@wolters.nl.

Bestelcoupon

Ja, ik bestel

___ ex *Wisforta* à ƒ 15,00/€ 6,81 ISBN 90 01 65956 X

Naam school ______________________

Ter attentie van ______________________

Adres ______________________

Postcode ______________________

Plaats ______________________

419/0068



Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11
Fax (050) 522 62 55

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

Wolters Noordhoff

419/0505